

УДК 512.542

Картеровы подгруппы в конечных почти простых группах

Е.П.Вдовин

Аннотация

В статье завершается классификация картеровых подгрупп в конечных почти простых группах. В частности, мы доказываем, что картеровы подгруппы в любой конечной почти простой группе сопряжены. Вместе с предыдущими результатами автора, Ф. Дла Волты, А. Луккини и М. К. Тамбурини, в качестве следствия, получается, что картеровы подгруппы любой конечной группы сопряжены.

1 Введение

Напомним, что подгруппа конечной группы называется *картеровой подгруппой* если она нильпотентна и самономализуема. Ввиду хорошо известного результата, любая конечная разрешимая группа содержит в точности один сопряженный класс картеровых подгрупп (см. [1]), и разумно предположить, что конечная группа содержит не более одного сопряженного класса картеровых подгрупп. Справедливость этого предположения основывается на интенсивном изучении различными авторами классов конечных групп, которые близки к простым. В частности, показано, что предположение имеет место для симметрических и знакопеременных групп (см. [2]); обозначая через p^t степень простого числа p , для любой такой группы A , что $SL_n(p^t) \leq A \leq GL_n(p^t)$ (см. [3] и [4]); для симплектических групп $Sp_{2n}(p^t)$, полных унитарных групп $GU_n(p^{2t})$ и, когда p

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05ч01ч00797), гранта Президента РФ (МКч1455.2005.1) и СО РАН (грант № 29 для молодых ученых и Интеграционный проект 2006.1.2)

нечетно, полных ортогональных групп $GO_n^\pm(p^t)$ (см. [5]). Позже в [6] результаты из [5] были расширены на любую группу G , удовлетворяющую $O^{p'}(S) \leq G \leq S$, где $S \in$ полная классическая матричная группа. Некоторые из спорадических простых групп также были изучены (см., например, [7]). В неразрешимых случаях, когда картеровы подгруппы существуют, они всегда оказывались нормализаторами силовских 2-подгрупп.

В работе мы рассмотрим следующую проблему, которую далее мы будем называть проблемой сопряженности.

Проблема. Сопряжены ли любые две картеровы подгруппы конечной группы?

В работе [8] доказано, что минимальный контрпример A к этой проблеме должен быть почти простым. Позже в [9] был получен более сильный результат.

Определение 1.1. Говорят, что конечная группа G удовлетворяет условию (C), если для любого неабелева композиционного фактора S любого композиционного ряда группы G и для любой нильпотентной подгруппы N группы G картеровы подгруппы группы $\langle \text{Aut}_N(S), S \rangle$ сопряжены (определение группы $\text{Aut}_N(S)$ можно найти ниже).

Поскольку группа S проста, она изоморфна группе своих внутренних автоморфизмов $\text{Inn}(S)$ и мы отождествляем S с подгруппой $\text{Inn}(S)$ группы $\text{Aut}(S)$. В [9] доказана следующая теорема.

Теорема 1.2. Если конечная группа G удовлетворяет условию (C), то картеровы подгруппы группы G сопряжены.

Таким образом, наша задача здесь доказать, что для каждой известной конечной простой группы S и любой нильпотентной подгруппы N группы $\text{Aut}(S)$ картеровы подгруппы группы $\langle S, N \rangle$ сопряжены. Некоторые классы почти простых групп, которые не могут быть минимальным контрпримером к проблеме, найдены в [6] и [10]. Таблица почти простых групп, для которых проблема сопряженности решена положительно дана в [9].

Наши обозначения стандартны. Если $G \in$ конечная группа, обозначим через $\mathbf{P}G$ факторгруппу $G/Z(G) \simeq \text{Inn}(G)$. Если $\pi \in$ множество простых чисел, то $\pi' \in$ его дополнение в множестве всех простых чисел. Для

натурального числа n через $\pi(n)$ обозначено множество простых делителей числа n , и через n_π обозначен максимальный делитель t числа n , для которого $\pi(t) \subseteq \pi$. Как обычно, $O_\pi(G)$ обозначает максимальную нормальную π -подгруппу группы G , через $O^{\pi'}(G)$ обозначена подгруппа, порожденная всеми π -элементами группы G . Если $\pi = \{2\}'$ — множество всех нечетных простых чисел, то $O_\pi(G) = O_{2'}(G)$ обозначается через $O(G)$. Если $g \in G$, то через g_π обозначается π -часть элемента g , т. е. $g_\pi = g^{|g|_{\pi'}}$. Через $F(G)$ обозначена подгруппа Фиттинга группы G , а через $F^*(G)$ — обобщенная подгруппа Фиттинга группы G . Центральное произведение групп G и H обозначено через $G * H$. Для конечной группы G мы обозначим через $\text{Aut}(G)$ группу автоморфизмов группы G . Если $\lambda \in \text{Aut}(G)$, то через G_λ обозначено множество λ -неподвижных точек, т. е. $G_\lambda = \{g \in G \mid g^\lambda = g\}$. Если $Z(G) = \{e\}$, то $G \simeq \text{Inn}(G)$ и можно предполагать, что $G \leq \text{Aut}(G)$. Говорят, что конечная группа G *почти простая*, если существует простая группа S , удовлетворяющая $S \leq G \leq \text{Aut}(S)$, т. е. если $F^*(G)$ — простая группа.

Если G — группа, A, B, H — подгруппы группы G и B нормальна в A ($B \trianglelefteq A$), то полагаем $N_H(A/B) = N_H(A) \cap N_H(B)$. Если $x \in N_H(A/B)$, то x индуцирует автоморфизм $Ba \mapsto Bx^{-1}ax$ группы A/B . Таким образом, существует гомоморфизм группы $N_H(A/B)$ в $\text{Aut}(A/B)$. Образ этого гомоморфизма обозначается через $\text{Aut}_H(A/B)$, а его ядро — через $C_H(A/B)$. В частности, если $S = A/B$ — композиционный фактор группы G , то для любой подгруппы $H \leq G$ определена группа $\text{Aut}_H(S)$. Если A, H — подгруппы группы G , то $\text{Aut}_H(A) = \text{Aut}_H(A/\{e\})$ по определению.

2 Предварительные результаты

Лемма 2.1. Пусть G — конечная группа, H — нормальная подгруппа группы G , $S = (A/H)/(B/H)$ — композиционный фактор группы G/H и L — подгруппа группы G . Тогда $\text{Aut}_L(A/B) \simeq \text{Aut}_{LH/H}((A/H)/(B/H))$.

Доказательство. Поскольку $H \leq B$, то $H \leq C_G(A/B)$, следовательно, можно считать, что $L = LH$. Кроме того, можно предполагать, что $L \leq N_G(A) \cap N_G(B)$ и $G = LA$. Тогда действие, задаваемое на A/B по правилу $x : Ba \mapsto Bx^{-1}ax$ совпадает с действием на $(A/H)/(B/H)$, задаваемое по

правилу $xH : BaH \mapsto Bx^{-1}axH$, откуда следует лемма. $\square$

Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 2.2. Пусть G — конечная группа, H — нормальная подгруппа группы G и $\bar{N}$ — нильпотентная подгруппа группы $\bar{G} = G/H$. Тогда существует такая нильпотентная подгруппа N группы G , что $NH/H = \bar{N}$.

Доказательство. Очевидно, можно считать, что $G/H = \bar{N}$. Существует такая подгруппа U группы G , что $UH = G$. Выберем среди таких подгрупп подгруппу минимального порядка. Тогда $U \cap H \leq \Phi(U)$, где $\Phi(U)$ — подгруппа Фраттини группы U . Действительно, если существует максимальная подгруппа M группы U , не содержащая $U \cap H$, то, очевидно, $MH = G$, что противоречит минимальности группы U . Таким образом, группа $U/\Phi(U)$ нильпотентна, следовательно, группа U нильпотентна и $N = U$. $\square$

Из лемм 2.1 и 2.2 следует, что если конечная группа G удовлетворяет (С), то для любой ее нормальной подгруппы N и разрешимой подгруппы H , группы G/H и HN удовлетворяют (С).

Лемма 2.3. Пусть G — конечная группа, K — картерова подгруппа группы G и N — нормальная подгруппа группы G . Предположим, что KN удовлетворяет (С) (это условие автоматически выполнено, если G удовлетворяет (С) или N разрешима) или $KN = G$. Тогда KN/N является картеровой подгруппой группы G/N .

Доказательство. Если $KN = G$, то утверждение очевидно. Предположим, что $KN \neq G$, т. е. KN удовлетворяет (С). Рассмотрим $x \in G$ и предположим, что $xN \leq N_{G/N}(KN/N)$. Следовательно, $x \in N_G(KN)$. Имеем, что K^x есть картерова подгруппа группы KN . Поскольку KN удовлетворяет (С), мы получаем, что ее картеровы подгруппы сопряжены. Таким образом, существует такой $y \in KN$, что $K^y = K^x$. Поскольку K является картеровой подгруппой группы G , отсюда следует, что $xy^{-1} \in N_G(K) = K$ и $x \in KN$. $\square$

Лемма 2.4. [9, лемма 5] Пусть K — картерова подгруппа конечной группы G , неединичный элемент z лежит в $Z(K)$ и $C_G(z)$ удовлетворяет (С). Тогда

- (а) любая подгруппа Y , содержащая K и удовлетворяющая (С), является самоноормализуемой в G ;
- (б) никакой сопряженный с z элемент из G , кроме z , не лежит в $Z(K)$;

- (в) если H — картерова подгруппа группы G , не сопряженная с K , то z не сопряжен ни с каким элементом из центра группы H .

В частности, централизатор $C_G(z)$ является самонормализуемым в G , и z не сопряжен ни с какой степенью $z^k \neq z$.

Лемма 2.5. Пусть G — конечная группа и Q — силовская 2-подгруппа группы G . Тогда картерова подгруппа K группы G , содержащая Q , существует в том и только в том случае, если $N_G(Q) = QC_G(Q)$.

Доказательство. Предположим, что существует картерова подгруппа K группы G , содержащая Q . Поскольку K нильпотентна, отсюда следует, что Q нормальна в K и $K \leq QC_G(Q) \trianglelefteq N_G(Q)$. По теореме Фейта-Томпсона (см. [11]) нормализатор $N_G(Q)$ разрешим. По лемме 2.4(а) группа $QC_G(Q)$ самонормализуема в $N_G(Q)$, значит, $N_G(Q) = QC_G(Q)$.

Предположим теперь, что $N_G(Q) = QC_G(Q)$, т. е. $N_G(Q) = Q \times O(C_G(Q))$. Поскольку подгруппа $O(C_G(Q))$ нечетного порядка, она разрешима. Следовательно, она содержит картерову подгруппу K_1 . Рассмотрим нильпотентную подгруппу $K = Q \times K_1$ группы G . Ясно, что $N_G(K) \leq N_G(Q)$. Но K есть картерова подгруппа группы $N_G(Q)$, значит, K есть картерова подгруппа группы G . $\square$

Определение 2.6. Имея ввиду лемму 2.5, будем говорить, что конечная группа G удовлетворяет условию **(ESyl2)**, если для силовской 2-подгруппы Q группы G справедливо равенство $N_G(Q) = QC_G(Q)$. Иными словами, группа G удовлетворяет **(ESyl2)**, если любой элемент нечетного порядка, нормализующий силовскую 2-подгруппу Q группы G , централизует Q .

Лемма 2.7. Пусть G — конечная группа, Q — силовская 2-подгруппа группы G и x — элемент нечетного порядка из $N_G(Q)$. Предположим, что существуют такие нормальные подгруппы $G_1, \dots, G_k$ группы G , что $G_1 \cap \dots \cap G_k \cap Q \leq Z(N_G(Q))$ и x централизует Q по модулю G_i для всех i . Тогда x централизует Q . В частности, если G/G_i удовлетворяет **(ESyl2)** для всех i , то G удовлетворяет **(ESyl2)**.

Доказательство. Рассмотрим нормальный ряд $Q \supseteq Q_1 \supseteq \dots \supseteq Q_k \supseteq Q_{k+1} = \{e\}$, где $Q_i = Q \cap (G_1 \cap \dots \cap G_i)$. Условия леммы влекут, что x централизует каждый фактор Q_{i-1}/Q_i . Поскольку x нечетного порядка, это влечет, что x централизует Q . $\square$

Лемма 2.8. [9, лемма 3] Пусть K — картерова подгруппа конечной группы G . Предположим, что существует нормальная подгруппа $B = T_1 \times \dots \times T_k$ группы G такая, что $G = KB$, $Z(T_i) = \{e\}$ и T_i не разложима в прямое произведение собственных подгрупп для всех i . Тогда $\text{Aut}_K(T_i)$ является картеровой подгруппой группы $\langle \text{Aut}_K(T_i), T_i \rangle$.

Лемма 2.9. Пусть H — такая подгруппа конечной группы G , что $|G : H| = 2^t$, H удовлетворяет условию **(ESyl2)**, и любой элемент нечетного порядка группы G лежит в H (это условие, очевидно, эквивалентно субнормальности подгруппы H). Тогда G удовлетворяет условию **(ESyl2)**.

Доказательство. Пусть Q — такая силовская 2-подгруппа группы G , что $Q \cap H$ — силовская 2-подгруппа группы H . Рассмотрим элемент $x \in N_G(Q)$ нечетного порядка. Поскольку $x \in H$, то $x \in N_H(Q) \leq N_H(Q \cap H) = (Q \cap H) \times O(N_H(Q \cap H))$, т. е. $x \in O(N_H(Q \cap H))$. Таким образом, множество элементов нечетного порядка из $N_G(Q)$ образует подгруппу $R = O(N_H(Q \cap H)) \cap N_G(Q)$ группы $N_G(Q)$. Ясно, что R нормальна в $N_G(Q)$, следовательно, $R = O(N_G(Q))$. С другой стороны, Q нормальна в $N_G(Q)$ по определению и $Q \cap R = \{e\}$, откуда $N_G(Q) = Q \times O(N_G(Q))$. $\square$

3 Группы лиева типа

Наши обозначения для групп лиева типа совпадают с обозначениями из [12], а для линейных алгебраических групп — из [13]. Если G — каноническая конечная группа лиева типа (определение смотри ниже) с тривиальным центром (мы не исключаем непростые группы лиева типа, такие как $A_1(2)$, все исключения даны в [12, теоремы 11.1.2 и 14.4.1]), то $\widehat{G}$ обозначает группу внутренне-диагональных автоморфизмов группы G . В виду [14, 3.2] мы имеем, что $\text{Aut}(G)$ порождается внутренне-диагональными, полевыми и графовыми автоморфизмами. Поскольку мы предполагаем, что $Z(G)$ тривиален, мы получаем, что $G \simeq \text{Inn}(G)$ и, значит, можно предполагать, что $G \leq \widehat{G} \leq \text{Aut}(G)$.

Пусть $\overline{G}$ — простая связная линейная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем $\overline{\mathbb{F}}_p$ положительной характеристики p . При этом $Z(\overline{G})$ может быть нетривиальным. Эндоморфизм σ группы $\overline{G}$ называется отображением Фробениуса, если $\overline{G}_\sigma$ конечна и σ является автоморфизмом группы $\overline{G}$ как абстрактной группы. Группы $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ называются каноническими конечными группами лиева типа и любая группа G , удовлетворяющая $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$, называется конечной группой лиева типа. Если $\overline{G}$ является простой алгебраической группой присоединенного типа, то будем говорить, что G также имеет присоединенный тип. Заметим, что в [12] только группы $O^{p'}(\overline{G})$ называются группами лиева типа.

Но позже в [15] Р.Картер говорит, что любая группа $\overline{G}_\sigma$ является конечной группой лиева типа для произвольной связной редуктивной группы $\overline{G}$. Более того, в [16] и [17] без каких-либо пояснений любая группа G , удовлетворяющая условию $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$, называется конечной группой лиева типа. Таким образом, приводя определение конечных групп лиева типа и канонических конечных групп лиева типа, мы намерены прояснить ситуацию здесь. Например, $\mathbf{PSL}_2(3)$ является канонической конечной группой лиева типа и $\mathbf{PGL}_2(3)$ является конечной группой лиева типа. Заметим, что элемент порядка 3 не сопряжен со своим обратным в $\mathbf{PSL}_2(3)$ и сопряжен со своим обратным в $\mathbf{PGL}_2(3)$. Поскольку такая информация о сопряжении важна во многих случаях (и очень важна и полезна в данной работе), мы находим разумным использовать такие обозначения. Через $\Phi(\overline{G})$ обозначена корневая система группы $\overline{G}$ и через Φ или $\Phi(G)$ обозначена корневая система группы $O^{p'}(G)$. Через $\Delta(\overline{G})$ обозначена фундаментальная группа группы $\overline{G}$, а через $\Delta(\Phi)$ — факторгруппа решетки, порожденной фундаментальными весами корневой системы Φ по решетке, порожденной корневой системой Φ . Отметим, что $\Delta(\overline{G})$ всегда является факторгруппой группы $\Delta(\Phi(\overline{G}))$ и для любой корневой системы Φ , отличной от D_{2n} группа $\Delta(\Phi)$ является циклической, а $\Delta(D_{2n})$ является элементарной абелевой группой порядка 4. Группа Вейля группы $\overline{G}$ обозначается через $W(\overline{G})$ и группа Вейля корневой системы Φ обозначается через $W(\Phi)$. Если $W(\Phi)$ — группа Вейля корневой системы Φ , то через w_0 обозначен единственный элемент, переводящий все положительные корни в отрицательные.

Мы говорим, что группы лиева типа G , у которых $O^{p'}(G)$ совпадает с одной из групп ${}^2A_n(q^2)$, ${}^2D_n(q^2)$, ${}^2E_6(q^2)$, определены над $GF(q^2)$, группы лиева типа ${}^3D_4(q^3)$ определены над $GF(q^3)$ и остальные группы лиева типа определены над $GF(q)$. Поле $GF(q)$ во всех случаях называется *базовым полем*. Ввиду [18, лемма 2.5.8], если $\overline{G}$ — группа присоединенного типа, то $\overline{G}_\sigma$ — группа внутренне-диагональных автоморфизмов группы $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$. Если $\overline{G}$ односвязна, то $\overline{G}_\sigma = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ (см. [19, 12.4]). В любом случае, ввиду [18, теорема 2.2.6(g)] $\overline{G}_\sigma = \overline{T}_\sigma O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ для любого σ -инвариантного

максимального тора $\bar{T}$ группы $\bar{G}$. В общем случае, для данной конечной группы лиева типа G (если мы рассматриваем ее как абстрактную группу) соответствующая алгебраическая группа определена не единственным образом. Например, если $G = \mathbf{PSL}_2(5) \simeq SL_2(4)$, то G можно получить либо как $(SL_2(\mathbb{F}_2))_\sigma$, либо как $O^{5'}((\mathbf{PSL}_2(\mathbb{F}_5))_\sigma)$ (для подходящих σ). Значит, для любой конечной группы G лиева типа, мы фиксируем (некоторым способом) соответствующую алгебраическую группу $\bar{G}$ и отображение Фробениуса σ такие, что $O^{p'}(\bar{G}_\sigma) \leq G \leq \bar{G}_\sigma$. Пусть $U = \langle X_r \mid r \in \Phi(\bar{G})^+ \rangle \in$ максимальная унипотентная подгруппа группы G . Если мы зафиксируем порядок на $\Phi(\bar{G})$, то любой $u \in U$ можно единственным образом записать в виде

$$u = \prod_{r \in \Phi^+} x_r(t_r), \quad (1)$$

где корни берутся в заданном порядке и t_r лежат в поле определения группы G . Если $O^{p'}(G)$ совпадает с одной из групп ${}^2A_n(q^2)$, ${}^2B_2(2^{2n+1})$, ${}^2D_n(q^2)$, ${}^3D_4(q^3)$, ${}^2E_6(q^2)$, ${}^2G_2(3^{2n+1})$, или ${}^2F_4(2^{2n+1})$, то будем говорить, что группа G является *скрученной*, в остальных случаях группа G называется *расщепленной*. Если $O^{p'}(\bar{G}_\sigma) \leq G \leq \bar{G}_\sigma \in$ скрученная группа лиева типа и $r \in \Phi(\bar{G})$, то через $\bar{r}$ всегда обозначен образ корня r относительно симметрии корневой системы, соответствующей графовому автоморфизму, используемому при построении группы G . Иногда мы используем обозначение $\Phi^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$, и $\Phi^+(q) = \Phi(q)$ является расщепленной канонической группой лиева типа с базовым полем $GF(q)$, $\Phi^-(q) = {}^2\Phi(q^2)$ является скрученной канонической группой лиева типа, определенной над полем $GF(q^2)$ (с базовым полем $GF(q)$).

Далее пусть $\bar{R} \in$ замкнутая σ -инвариантная подгруппа группы $\bar{G}$. Положим $R = G \cap \bar{R}$ и $N(G, R) = G \cap N_{\bar{G}}(\bar{R})$. Заметим, что $N(G, R) \neq N_G(R)$ в общем случае, и мы называем группу $N(G, R)$ *алгебраическим нормализатором* группы R . Например, если $G = SL_n(2)$, то подгруппа диагональных матриц H группы G тривиальна, значит, $N_G(H) = G$. Но $G = (SL_n(\mathbb{F}_2))_\sigma$, где $\sigma \in$ отображение Фробениуса $\sigma : (a_{i,j}) \mapsto (a_{i,j}^2)$. Поэтому $H = \bar{H}_\sigma$, где $\bar{H}$ является подгруппой диагональных матриц в $SL_n(\mathbb{F}_2)$.

Таким образом, $N(G, H)$ является группой мономиальных матриц в G . Мы используем термин «алгебраический нормализатор» для того, чтобы избегать подобных трудностей и чтобы сделать наши доказательства универсальными. Группа R называется *тором* (соотв. *редуктивной подгруппой*, *параболической подгруппой*, *максимальным тором*, *редуктивной подгруппой максимального ранга*) если $\bar{R} \in$ тор (соотв. редуктивная подгруппа, параболическая подгруппа, максимальный тор, редуктивная подгруппа максимального ранга) группы $\bar{G}$. Максимальный σ -инвариантный тор $\bar{T}$, для которого $\bar{T}_\sigma$ является подгруппой Картана группы $\bar{G}_\sigma$ называется *максимальным расщепленным тором*. Если $\bar{R} \in$ связная редуктивная подгруппа максимального ранга группы $\bar{G}$, то $\bar{R} = \bar{G}_1 * \dots * \bar{G}_k * \bar{Z}$, где $\bar{G}_i$ являются простыми связными линейными алгебраическими группами и $\bar{Z} = Z(\bar{R})^0$ (см [13, теорема 27.5]). Более того, если $\Phi_1, \dots, \Phi_k \in$ корневые системы групп $\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_k$ соответственно, то $\Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_k$ является подсистемой системы $\Phi(\bar{G})$. Существует удобный алгоритм, принадлежащий Борелю и де Зибенталю [20] и, независимо, Динкину [21] определения неразложимых подсистем произвольной неразложимой корневой системы Φ . Необходимо удалить некоторые вершины из расширенной диаграммы Динкина корневой системы Φ и повторить процедуру для полученных компонент связности. Связные компоненты, получаемые таким образом, являются диаграммами Динкина для неразложимых подсистем и диаграмма Динкина любой неразложимой подсистемы может быть получена таким образом.

Далее предположим, что редуктивная подгруппа $\bar{R}$ является σ -инвариантной. Ввиду [19, 10.10] существует σ -инвариантный максимальный тор $\bar{T}$ группы $\bar{R}$. Пусть $\bar{G}_{i_1}, \dots, \bar{G}_{i_{j_i}} \in \sigma$ -орбита группы $\bar{G}_{i_1}$. Рассмотрим индуцированное действие отображения σ на факторгруппе

$$(\bar{G}_{i_1} * \dots * \bar{G}_{i_{j_i}}) / Z(\bar{G}_{i_1} * \dots * \bar{G}_{i_{j_i}}) \simeq \mathbf{P}\bar{G}_{i_1} \times \dots \times \mathbf{P}\bar{G}_{i_{j_i}}.$$

Поскольку $\mathbf{P}\bar{G}_{i_1} \simeq \dots \simeq \mathbf{P}\bar{G}_{i_{j_i}}$ являются простыми (как абстрактные группы), то σ индуцирует циклическую подстановку на множестве $\mathbf{P}\bar{G}_{i_1}, \dots, \mathbf{P}\bar{G}_{i_{j_i}}$, и можно считать, что нумерация выбрана так, что $\mathbf{P}\bar{G}_{i_1}^\sigma =$

$\mathbf{P}\overline{G}_{i_2}, \dots, \mathbf{P}\overline{G}_{i_{j_i}}^\sigma = \mathbf{P}\overline{G}_{i_1}$. Таким образом, справедливо равенство

$$(\mathbf{P}\overline{G}_{i_1} \times \dots \times \mathbf{P}\overline{G}_{i_{j_i}})_\sigma = \{x \mid x = g \cdot g^\sigma \cdot \dots \cdot g^{\sigma^{j_i-1}} \text{ для некоторого } g \in \mathbf{P}\overline{G}_{i_1}\}_\sigma \simeq (\mathbf{P}\overline{G}_{i_1})_{\sigma^{j_i}}.$$

Ввиду [19, 10.15] группа $\mathbf{P}\overline{G}_{\sigma^{j_i}}$ конечна, значит, $O^{p'}((\mathbf{P}\overline{G}_{i_1})_{\sigma^{j_i}})$ является канонической конечной группой лиева типа, возможно, с большим базовым полем, чем базовое поле группы $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$.

Пусть $\overline{B}_{i_1} \in$ прообраз σ^{j_i} -инвариантной подгруппы Бореля группы $\mathbf{P}\overline{G}_{i_1}$ в группе $\overline{G}_{i_1}$ относительно естественного эпиморфизма, и $\overline{T}_{i_1} \in$ σ^{j_i} -инвариантный максимальный тор группы $\overline{G}_{i_1}$, лежащий в $\overline{B}_{i_1}$ (их существование следует из [19, 10.10]). Тогда, как следует из замечания в начале параграфа 11 из [19], подгруппы $\overline{U}_{i_1}$ и $\overline{U}_{i_1}^-$, порожденные $\overline{T}_{i_1}$ -инвариантными корневыми подгруппами, взятыми по всем положительным и отрицательным корням соответственно также являются σ^{j_i} -инвариантными. Поскольку $\overline{G}_{i_1} \in$ простая алгебраическая группа, то $\overline{G}_{i_1}$ порождается подгруппами $\overline{U}_{i_1}$ и $\overline{U}_{i_1}^-$. Далее, $Z(\overline{G}_{i_1} * \dots * \overline{G}_{i_{j_i}})$ состоит из полупростых элементов, поэтому ограничение естественного эпиморфизма $\overline{G}_{i_1} \rightarrow \mathbf{P}\overline{G}_{i_1}$ на $\overline{U}_{i_1}$ и $\overline{U}_{i_1}^-$ есть изоморфизм. Следовательно, для любого k подгруппы $(\overline{U}_{i_1})^{\sigma^k}$ и $(\overline{U}_{i_1}^-)^{\sigma^k}$ являются максимальными σ^{j_i} -инвариантными связными унипотентными подгруппами группы $\overline{G}_{i_k}$ и порождают группу $\overline{G}_{i_k}$.

Таким образом, $\overline{U}_{i_1} \times (\overline{U}_{i_1})^\sigma \times \dots \times (\overline{U}_{i_1})^{\sigma^{j_i-1}}$ и $\overline{U}_{i_1}^- \times (\overline{U}_{i_1}^-)^\sigma \times \dots \times (\overline{U}_{i_1}^-)^{\sigma^{j_i-1}}$ являются максимальными σ -инвариантными связными унипотентными подгруппами группы $\overline{G}_{i_1} * \dots * \overline{G}_{i_{j_i}}$ и порождают группу $\overline{G}_{i_1} * \dots * \overline{G}_{i_{j_i}}$. В силу [19, следствие 12.3(a)], мы имеем

$$\begin{aligned} O^{p'}((\overline{G}_{i_1} * \dots * \overline{G}_{i_{j_i}})_\sigma) = \\ \langle (\overline{U}_{i_1} \times (\overline{U}_{i_1})^\sigma \times \dots \times (\overline{U}_{i_1})^{\sigma^{j_i-1}})_\sigma, (\overline{U}_{i_1}^- \times (\overline{U}_{i_1}^-)^\sigma \times \dots \times (\overline{U}_{i_1}^-)^{\sigma^{j_i-1}})_\sigma \rangle \simeq \\ \langle (\overline{U}_{i_1})_{\sigma^{j_i}}, (\overline{U}_{i_1}^-)_{\sigma^{j_i}} \rangle = O^{p'}((\overline{G}_{i_1})_{\sigma^{j_i}}). \end{aligned}$$

В силу [19, 11.6 и следствие 12.3], группа $\langle (\overline{U}_{i_1})_{\sigma^{j_i}}, (\overline{U}_{i_1}^-)_{\sigma^{j_i}} \rangle$ является канонической конечной группой лиева типа. Более того, из приведенных выше

рассуждений следует, что группы $\langle (\overline{U}_{i_1})_{\sigma^{j_i}}, (\overline{U}_{i_1}^-)_{\sigma^{j_i}} \rangle / Z(\langle (\overline{U}_{i_1})_{\sigma^{j_i}}, (\overline{U}_{i_1}^-)_{\sigma^{j_i}} \rangle)$ и $O^{p'}((\mathbf{P}\overline{G}_{i_1})_{\sigma^{j_i}})$ изоморфны. Обозначая $O^{p'}((\overline{G}_{i_1} * \dots * \overline{G}_{i_{j_i}})_{\sigma})$ через G_i , мы получаем, что G_i является канонической конечной группой лиева типа для всех i . Подгруппы G_i группы $O^{p'}(\overline{G}_{\sigma})$, возникающие таким образом, называются *подсистемными подгруппами* группы $O^{p'}(\overline{G}_{\sigma})$.

Поскольку $\overline{G}_{i_1} * \dots * \overline{G}_{j_i}$ является σ -инвариантной подгруппой, то $\overline{G}_{i_1} * \dots * \overline{G}_{j_i} \cap \overline{T}$ является σ -инвариантным максимальным тором группы $\overline{G}_{i_1} * \dots * \overline{G}_{j_i}$. Следовательно, мы можем предполагать, что для любой σ -орбиты $\{\overline{G}_{i_1}, \dots, \overline{G}_{i_{j_i}}\}$, пересечение $\overline{T} \cap \overline{G}_{i_1} * \dots * \overline{G}_{i_{j_i}}$ является максимальным σ -инвариантным тором группы $\overline{G}_{i_1} * \dots * \overline{G}_{i_{j_i}}$. Тогда $\overline{R}_{\sigma} = \overline{T}_{\sigma}(G_1 * \dots * G_m)$ и $\overline{T}_{\sigma}$ нормализует каждую из групп G_i .

Для σ -орбиты $\{\overline{G}_{i_1}, \dots, \overline{G}_{i_{j_i}}\}$ группы $\overline{G}_{i_1}$, удовлетворяющей $G_i = O^{p'}((\overline{G}_{i_1} * \dots * \overline{G}_{i_{j_i}})_{\sigma})$, рассмотрим $\text{Aut}_{\overline{R}_{\sigma}}(G_i)$. Поскольку $G_1 * \dots * G_{i-1} * G_{i+1} * \dots * G_k * \overline{Z}_{\sigma} \leq C_{\overline{R}_{\sigma}}(G_i)$, мы имеем, что $\text{Aut}_{\overline{R}_{\sigma}}(G_i) \simeq (\overline{T}_{\sigma}G_i) / Z(\overline{T}_{\sigma}G_i)$. Из [18, предложение 2.6.2] следует, что автоморфизмы, индуцируемые тором $\overline{T}_{\sigma}$ на G_i являются диагональными. Следовательно, справедливы включения $\mathbf{P}G_i \leq \text{Aut}_{\overline{R}_{\sigma}}(G_i) \leq \widehat{\mathbf{P}G_i}$, в частности $\text{Aut}_{\overline{R}_{\sigma}}(G_i)$ является конечной группой лиева типа.

Пусть $\overline{R} \in \sigma$ -инвариантная связная редуктивная подгруппа максимального ранга (в частности, $\overline{R}$ может быть максимальным тором) группы G . Поскольку группы $N_{\overline{G}}(\overline{R})/\overline{R}$ и $N_W(W_{\overline{R}})/W_{\overline{R}}$ изоморфны, мы получаем индуцированное действие автоморфизма σ на $N_W(W_{\overline{R}})/W_{\overline{R}}$ и мы говорим, что $w_1 \equiv w_2$, для $w_1, w_2 \in N_W(W_{\overline{R}})/W_{\overline{R}}$ если существует элемент $w \in N_W(W_{\overline{R}})/W_{\overline{R}}$, удовлетворяющий равенству $w_1 = w^{-1}w_2w^{\sigma}$. Пусть $Cl(\overline{G}_{\sigma}, \overline{R}) \in$ множество $\overline{G}_{\sigma}$ -сопряженных классов σ -инвариантных подгрупп $\overline{R}^g$, где $g \in \overline{G}$. Тогда $Cl(\overline{G}_{\sigma}, \overline{R})$ находится во взаимнооднозначном соответствии с множеством σ -сопряженных классов $Cl(N_W(W_{\overline{R}})/W_{\overline{R}}, \sigma)$, где $W \in$ группа Вейля группы $\overline{G}$, $W_{\overline{R}} \in$ группа Вейля группы $\overline{R}$ (и она является подгруппой группы W). Если $w \in$ элемент группы $N_W(W_{\overline{R}})/W_{\overline{R}}$, и $(\overline{R}^g)_{\sigma}$ соответствует σ -сопряженному классу элемента w , то говорят, что $(\overline{R}^g)_{\sigma}$ получена «скручиванием» группы $\overline{R}$ элементом $w\sigma$. При этом $(\overline{R}^g)_{\sigma} \simeq \overline{R}_{\sigma w}$. Более подробно о скручивании можно прочитать в [23].

Лемма 3.1. Пусть $\bar{G}$ — простая связная линейная алгебраическая группа над полем характеристики p , t — элемент порядка r группы $\bar{G}$, не делящегося на p . Тогда $C_{\bar{G}}(t)/C_{\bar{G}}(t)^0$ является $\pi(r)$ -группой.

Доказательство. Поскольку p не делит r , то t полупрост. Значит, $C_{\bar{G}}(t)^0$ есть связная редуцирующая подгруппа максимального ранга группы $\bar{G}$ и любой p -элемент группы $C_{\bar{G}}(t)$ содержится в $C_{\bar{G}}(t)^0$ (см. [22, Теорема 2.2]). Предположим, что некоторое простое число $s \notin \pi(r)$ делит порядок $|C_{\bar{G}}(t)/C_{\bar{G}}(t)^0|$. Тогда $s \neq p$ и для некоторого натурального $k > 0$, централизатор $C_{\bar{G}}(t)$ содержит такой элемент x порядка s^k , что $x \notin C_{\bar{G}}(t)^0$. Поскольку x и t коммутируют, то $x \cdot t$ — полупростой элемент группы $\bar{G}$ порядка rs^k . Следовательно, существует максимальный тор $\bar{T}$ группы $\bar{G}$, для которого $x \cdot t \in \bar{T}$. Тогда $(xt)^r = x^r \in \bar{T}$. Поскольку $(s, r) = 1$, существует такое m , что $rm \equiv 1 \pmod{s^k}$, таким образом, $(x^r)^m = x \in \bar{T}$. Так как $xt, x \in \bar{T}$, то $t \in \bar{T}$, поэтому $\bar{T} \leq C_{\bar{G}}(t)^0$, значит, $x \in C_{\bar{G}}(t)^0$; противоречие. $\square$

Напомним, что элемент x линейной алгебраической группы $\bar{G}$ называется *регулярным*, если его централизатор имеет минимальную возможную размерность. В частности, если элемент x полупрост и группа $\bar{G}$ связна и редуцирующая, то элемент x называется *регулярным*, если компонента связности его централизатора является максимальным тором группы $\bar{G}$.

Предположим теперь, что $\bar{R}$ является σ -инвариантной параболической подгруппой группы $\bar{G}$ и $\bar{U} \in$ ее унипотентный радикал. Тогда она содержит такую связную редуцирующую подгруппу $\bar{L}$, что $\bar{R}/\bar{U} \simeq \bar{L}$. Подгруппа $\bar{L}$ называется *фактором Леви* группы $\bar{R}$. Более того, если $\bar{Z} = Z(\bar{L})^0$, то $\bar{L} = C_{\bar{G}}(\bar{Z})$ (см. [13, 30.2]). Пусть $Rad(\bar{R}) \in$ радикал группы $\bar{R}$. Тогда он является σ -инвариантной связной разрешимой подгруппой, значит, по [19, 10.10], он содержит σ -инвариантный максимальный тор $\bar{Z}$. Далее, $C_{\bar{G}}(\bar{Z}) = C_{\bar{R}}(\bar{Z})$ есть σ -инвариантный фактор Леви группы $\bar{R}$. Таким образом, любая σ -инвариантная параболическая подгруппа группы $\bar{G}$ содержит σ -инвариантный фактор Леви $\bar{L}$ и $\bar{L}$ является связной редуцирующей подгруппой максимального ранга группы $\bar{G}$.

Лемма 3.2. (Лемма Хартли-Шута [24, лемма 2.2]) Пусть $G = O^{p'}(\bar{G}_\sigma)$ — конечная каноническая присоединенная группа лиева типа с полем определения $GF(q)$. Пусть $H \in$ подгруппа Картана группы G и $s \in GF(q)$. Если $r = \bar{r}$ и группа G скрученная, то предположим также, что s лежит в базовом поле группы G . Тогда существует такой элемент $h(\chi) \in H$, что

$\chi(r) = s$, за исключением следующих случаев, в которых $h(\chi)$ может быть выбран так, чтобы $\chi(r)$ имел указанные значения:

- (а) $G = A_1(q)$, $\chi(r) = s^2$;
- (б) $G = C_n(q)$, r — длинный корень, $\chi(r) = s^2$;
- (в) $G = {}^2A_2(q^2)$, $r \neq \bar{r}$, $\chi(r) = s^3$;
- (г) $G = {}^2A_3(q^2)$, $r \neq \bar{r}$, $\chi(r) = s^2$;
- (д) $G = {}^2D_n(q^2)$, $r \neq \bar{r}$, $\chi(r) = s^2$;
- (е) $G = {}^2G_2(3^{2n+1})$, $r = a$ или $r = 3a + b$, где a — короткий, b — длинный фундаментальный корень, $\chi(r) = s^2$.

Лемма 3.3. Пусть $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$ — конечная присоединенная группа лиева типа над полем нечетной характеристики p и корневая система Φ группы $\overline{G}$ — одна из следующих: A_n ($n \geq 2$), D_n ($n \geq 4$), B_n ($n \geq 3$), G_2 , F_4 , E_6 , E_7 или E_8 ; и $G \not\cong {}^2G_2(3^{2n+1})$. Пусть U — максимальная унитарная подгруппа группы G , H — подгруппа Картана группы G , нормализующая U , и Q — силовская 2-подгруппа группы H . Тогда $C_U(Q) = \{e\}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать лемму для случая $G = O^{p'}(\overline{G}_\sigma) = O^{p'}(G)$, т. е. можно считать, что G является канонической присоединенной группой лиева типа. Если G расщепленная или $G \simeq {}^2D_n(q^2)$, то лемма следует из [10, лемма 2.8]. Предположим, что $G \simeq {}^2A_n(q^2)$ или $G \simeq {}^2E_6(q^2)$, тогда $\Phi(\overline{G})$ равна A_n и E_6 соответственно. Обозначим через $\bar{r}$ образ корня r корневой системы Φ относительно соответствующей симметрии. В терминах из [12], корневая система $\Phi(\overline{G})$ представима в виде объединения классов эквивалентности Ψ_i , причем каждый из Ψ_i имеет тип либо A_1 , либо $A_1 \times A_1$, либо A_2 . Ввиду [12, Предложение 13.6.1], справедливо равенство $U = \prod_i X_{\Psi_i}$, где

$$X_{\Psi_i} = \{x_r(t) \mid t \in GF(q)\},$$

если $\Psi_i = \{r\}$ имеет тип A_1 (при этом $r = \bar{r}$);

$$X_{\Psi_i} = \{x_r(t)x_{\bar{r}}(t^q) \mid t \in GF(q^2)\},$$

если $\Psi_i = \{r, \bar{r}\}$ имеет тип $A_1 \times A_1$ (при этом $r \neq \bar{r}$ и $r + \bar{r} \notin \Phi(\overline{G})$);

$$X_{\Psi_i} = \{x_r(t)x_{\bar{r}}(t^q)x_{r+\bar{r}}(u) \mid t \in GF(q^2), u + u^q = -N_{r,\bar{r}}tt^q\},$$

если $\Psi_i = \{r, \bar{r}, r + \bar{r}\}$ имеет тип A_2 (при этом $r \neq \bar{r}$ и $r + \bar{r} \in \Phi(\overline{G})$). Далее, если $h(\chi) \in$ элемент из группы H , то справедливы следующие равенства (см. [12, стр. 263]):

$$h(\chi)x_r(t)h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)t),$$

если $r = \bar{r}$ и $\Psi_i = \{r\}$ имеет тип A_1 ;

$$h(\chi)x_r(t)x_{\bar{r}}(t^q)h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)t)x_{\bar{r}}(\chi(\bar{r})t^q),$$

если $r \neq \bar{r}$, $r + \bar{r} \notin \Phi(\bar{G})$ и $\Psi_i = \{r, \bar{r}\}$ имеет тип $A_1 \times A_1$;

$$h(\chi)x_r(t)x_{\bar{r}}(t^q)x_{r+\bar{r}}(u)h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)t)x_{\bar{r}}(\chi(\bar{r})t^q)x_{r+\bar{r}}(\chi(r+\bar{r})u),$$

если $r \neq \bar{r}$, $r + \bar{r} \in \Phi(\bar{G})$ и $\Psi_i = \{r, \bar{r}, r + \bar{r}\}$ имеет тип A_2 .

Пусть $u \in$ нетривиальный элемент из $C_U(Q)$. Тогда u содержит нетривиальный множитель из X_{Ψ_i} для некоторого i . В силу единственности разложения в виде произведения $\prod_i X_{\Psi_i}$ (см. [12, Предложение 13.6.1]) можно считать, что $u \in X_{\Psi}$.

Предположим, что Ψ имеет тип A_1 , т. е. $u = x_r(t)$, $t \in GF(q)$, $r = \bar{r}$. Ввиду леммы Хартли-Шута 3.2 для любого $s \in GF(q)$ существует $h(\chi) \in H$ такой, что $\chi(r) = s$. Возьмем $s = -1$. Тогда существует $h(\chi) \in H$ такой, что $\chi(r) = -1$. Поскольку $h(\chi)^2 = h(\chi^2)$ (см. формулу на стр. 98 из [12]), то мы имеем, что $\chi^2(r) = 1$, т. е. $|h(\chi)^2| < |h(\chi)|$. Значит, порядок $|h(\chi)|$ четен и можно записать $h(\chi) = h_2 \cdot h_{2'} = h(\chi_1) \cdot h(\chi_2) \in$ разложение элемента $h(\chi)$ в виде произведения его 2- и 2'- частей. Далее, $\chi(r) = \chi_1(r) \cdot \chi_2(r)$, следовательно, $\chi_1(r) = -1$ и $\chi_2(r) = 1$. Таким образом, $h(\chi_1)x_r(t)h(\chi_1)^{-1} = x_r(-t) \neq x_r(t)$. Значит, случай $u = x_r(t)$ и $\Psi = \{r\}$ имеет тип A_1 невозможен.

Предположим, что $\Psi = \{r, \bar{r}\}$ имеет тип $A_1 \times A_1$. По лемме Хартли-Шута 3.2 для любого $s \in GF(q^2)$ существует такой $h(\chi) \in H$, что $\chi(r) = s^2$. Поскольку существует такой $s \in GF(q^2)$, что $s^2 = -1$, то существует такой $h(\chi) \in H$, что $\chi(r) = -1$. Как и раньше $h(\chi)$ представим в виде $h(\chi_1) \cdot h(\chi_2) \in$ произведения своих 2- и 2'- частей. Тогда $\chi_1(r) = -1$, следовательно

$$h(\chi_1)x_r(t)x_{\bar{r}}(t^q)h(\chi_1)^{-1} = x_r(-t)x_{\bar{r}}(-t^q) \neq x_r(t)x_{\bar{r}}(t^q).$$

Таким образом, случай $u = x_r(t)x_{\bar{r}}(t^q)$ и $\Psi = \{r, \bar{r}\}$ имеет тип $A_1 \times A_1$ невозможен.

Предположим, наконец, что $\Psi = \{r, \bar{r}, r + \bar{r}\}$ имеет тип A_2 . По лемме Хартли-Шута 3.2 для любого $s \in GF(q^2)$ существует $h(\chi) \in H$ такой, что $\chi(r) = s^3$. Выберем $s = -1$, тогда существует такой $h(\chi) \in H$, что $\chi(r) = -1$. Вновь $h(\chi) = h(\chi_1) \cdot h(\chi_2)$ представим в виде произведения своих 2- и 2'- частей и $\chi_1(r) \neq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} h(\chi_1)x_r(t)x_{\bar{r}}(t^q)x_{r+\bar{r}}(u)h(\chi_1)^{-1} = \\ x_r(-t)x_{\bar{r}}(\chi_1(-t^q)x_{r+\bar{r}}(\chi_1(r+\bar{r})u) \neq \\ x_r(t)x_{\bar{r}}(t^q)x_{r+\bar{r}}(u) \end{aligned}$$

при $t \neq 0$. Если $t = 0$, то выберем s так, что $s^2 = -1$. Тогда $\chi_1(r + \bar{r}) = -1$ и, как и выше, мы получаем неравенство. Значит, и этот последний случай невозможен.

Используя лемму Хартли-Шута 3.2, аналогичные рассуждения доказывают лемму и в оставшихся случаях $G \simeq {}^3D_4(q^3)$, $G \simeq G_2(q)$ и $G \simeq F_4(q)$. Нам в дальнейших рассуждениях не потребуется применять лемму 3.3 для этих групп, поэтому мы не приводим для них подробного доказательства. $\square$

Лемма 3.4. Пусть $O^{p'}(\bar{G}_\sigma) = G$ — каноническая присоединенная конечная группа лиева типа над полем нечетной характеристики p и -1 не является квадратом в базовом поле группы G . Предположим, что корневая система Φ группы $\bar{G}$ равна C_n . Пусть U — максимальная унитарная подгруппа группы G , H — подгруппа Картана группы G , нормализующая U , и Q — силовская 2-подгруппа группы H . Тогда $C_U(Q) = \langle X_r \mid r \text{ является длинным корнем} \rangle$.

Доказательство. Если r — короткий корень, то существует корень s , удовлетворяющий условию $\langle s, r \rangle = 1$. Таким образом, $x_r(t)^{h_s(-1)} = x_r((-1)^{\langle s, r \rangle} t) = x_r(-t)$ (см. [12, предложение 6.4.1]). Следовательно, если $x \in C_U(Q)$ и $x_r(t) \in$ нетривиальный множитель в разложении (1) элемента x , то r является длинным корнем. Далее, если r является длинным корнем, то для любого корня s либо $|\langle s, r \rangle| = 2$, либо $\langle s, r \rangle = 0$, т. е. $x_r(t)^{h_s(-1)} = x_r(t)$. При выполнении условия, что -1 не является квадратом в базовом поле группы G (т. е. в поле $GF(q)$) мы получаем, что $q \equiv -1 \pmod{4}$, поэтому $\langle h_s(-1) \mid s \in \Phi \rangle = Q$, откуда следует лемма. $\square$

Лемма 3.5. Пусть $G = PSp_{2n}(q)$ — простая каноническая группа лиева типа, J — подмножество фундаментальных корней, содержащее длинный фундаментальный корень r_n , P_J — параболическая подгруппа, порожденная подгруппой Бораля B и группами X_r при $-r \in J$, L — фактор Леви подгруппы P_J . Обозначим через S квазипростую нормальную подгруппу группы L , изоморфную $Sp_{2k}(q)$ (она всегда существует, поскольку $r_n \in J$). Тогда $\text{Aut}_L(S/Z(S)) = S/Z(S)$.

Доказательство. Данное утверждение известно, оно доказано, например, в неопубликованной работе Н.А.Вавилова. Мы приведем здесь доказательство для полноты изложения. Как мы отмечали выше, L является редуктивной подгруппой максимального ранга группы G , и потому справедливы включения $S/Z(S) \leq \text{Aut}_L(S/Z(S)) \leq \widehat{S/Z(S)}$. Поскольку $|\widehat{C_n(q)} : C_n(q)| = (2, q-1)$, то для четного q утверждение очевидно. Если же q нечетно, то для $\text{Aut}_L(S/Z(S))$ могут быть выполнены лишь две возможности: либо $\text{Aut}_L(S/Z(S)) = S/Z(S)$, либо $\text{Aut}_L(S/Z(S)) = \widehat{S/Z(S)}$. Покажем, что второе равенство невозможно.

В наших обозначениях фундаментальные корни корневой системы группы $S \in \widehat{C_n(q)}$ это корни $r_{n-k+1}, \dots, r_n$. Если выполнено равенство $\text{Aut}_L(S/Z(S)) = \widehat{S/Z(S)}$, то существуют такие элементы $s_1, \dots, s_k$ решетки

$\mathbb{Z}\Phi = \mathbb{Z}C_n$, что

$$\langle s_i, r_{n-k+j} \rangle = \frac{(s_i, r_{n-k+j})}{(s_i, s_i)} = \begin{cases} 1 & \text{если } i = j, \\ 0 & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

(Они порождают решетку фундаментальных весов и, таким образом, позволяют получить все диагональные автоморфизмы группы S .) Но для любого корня r из C_n мы имеем, что либо $\langle r, r_n \rangle = 0$, либо $\langle r, r_n \rangle = \pm 2$, т. е. для любого элемента $s \in \mathbb{Z}\Phi$ число $\langle s, r_n \rangle$ четно, в частности, отлично от 1. Следовательно, такого набора элементов $s_1, \dots, s_k$ не существует. $\square$

Лемма 3.6. Пусть $G \in$ конечная группа лиева типа над полем нечетной характеристики и $\bar{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\bar{G}_\sigma) \leq G \leq \bar{G}_\sigma$. Тогда если G удовлетворяет условию (ESyl2), то любая группа L , для которой справедливо $G \leq L \leq \bar{G}_\sigma$ удовлетворяет (ESyl2).

Доказательство. Пусть $Q \in$ силовская 2-подгруппа группы $\bar{G}_\sigma$ и $Q^0 = O^{p'}(\bar{G}_\sigma) \cap Q \in$ силовская 2-подгруппа группы $O^{p'}(\bar{G}_\sigma)$. Ясно, что если $N_{\bar{G}_\sigma}(Q^0) = QC_{\bar{G}_\sigma}(Q)$, то утверждение леммы справедливо. Ввиду [25, теорема 1], если $\bar{G}_\sigma \in$ классическая группа, то равенство $N_{\bar{G}_\sigma}(Q^0) = QC_{\bar{G}_\sigma}(Q)$ может не выполняться лишь в том случае, когда корневая система группы $\bar{G}$ имеет тип A_1 или C_n . Если корневая система группы $\bar{G}$ имеет тип A_1 или C_n , то $|\bar{G}_\sigma : O^{p'}(\bar{G}_\sigma)| = 2$ и утверждение леммы следует из леммы 2.9.

Предположим теперь, что $G \in$ группа исключительного типа. Если $\bar{G}_\sigma = O^{p'}(\bar{G}_\sigma)$, то утверждение леммы, очевидно, справедливо. Поэтому равенство $N_{\bar{G}_\sigma}(Q^0) = QC_{\bar{G}_\sigma}(Q)$, возможно, не выполняется лишь в том случае, когда корневая система группы $\bar{G}$ имеет тип E_6 или E_7 . Если корневая система группы $\bar{G}$ имеет тип E_7 , то $|\bar{G}_\sigma : O^{p'}(\bar{G}_\sigma)| = 2$ и утверждение леммы следует из леммы 2.9.

Предположим, что корневая система группы $\bar{G}$ имеет тип E_6 . Тогда либо $\bar{G}_\sigma = O^{p'}(\bar{G}_\sigma)$, либо $|\bar{G}_\sigma : O^{p'}(\bar{G}_\sigma)| = 3$. В первом случае доказывать нечего, поэтому предположим, что $|\bar{G}_\sigma : O^{p'}(\bar{G}_\sigma)| = 3$. Поскольку группа G совпадает либо с $\bar{G}_\sigma$, либо с $O^{p'}(\bar{G}_\sigma)$, и поскольку в том случае, если $G = \bar{G}_\sigma$ доказывать нечего, можно считать, что $G = O^{p'}(\bar{G}_\sigma)$. Ввиду [18, теорема 4.10.2] существует такой максимальный тор T группы $\bar{G}_\sigma$, что Q содержится в $N(\bar{G}_\sigma, T)$. Поскольку $|\bar{G}_\sigma : G| = 3$, то $Q = Q^0 \leq N(G, T \cap G)$. Ввиду [26, теорема 6] справедливо равенство $N_G(Q) = Q \times R^0$, где $R^0 \leq T \in$ циклическая группа нечетного порядка. Далее, поскольку $\bar{G}_\sigma = TG$, то $N_{\bar{G}_\sigma}(Q) = \langle N_T(Q), N_G(Q) \rangle$. Действительно, $N(G, T \cap G)/(T \cap G) \simeq N(G, T)/T$. Следовательно, силовская 2-подгруппа QT/T группы $N(G, T)/T$ совпадает со своим нормализатором. Поскольку факторгруппа $\bar{G}_\sigma/G$ циклическая порядка 3, то $N_{\bar{G}_\sigma}(Q) = \langle tg, N_G(Q) \rangle$, где $t \in T$ и $g \in G$. Кроме того, поскольку $|\bar{G}_\sigma : G| = 3$, можно считать, что tg является элементом порядка 3^k для

некоторого $k > 0$. Так как $t \in T \leq N(\bar{G}_\sigma, T)$, то $Q^t \leq N(G, T \cap G)$. Значит, существует элемент $g_1 \in N(G, T \cap G)$ такой, что $Q^t = Q^{g_1^{-1}}$. Поэтому можно считать, что $tg = tg_1 \in N(\bar{G}_\sigma, T)$. При естественном эпиморфизме $\pi : N(\bar{G}_\sigma, T) \rightarrow N(\bar{G}_\sigma, T)/T$ образ $N_{N(\bar{G}_\sigma, T)}(Q)$ совпадает с Q . Значит, $(tg)^\pi = e$, поэтому $tg \in T$. Таким образом, любой элемент нечетного порядка группы $\bar{G}_\sigma$, нормализующий Q , лежит в T . Поскольку $T \in \text{тор}$, то $T \in \text{абелева группа}$, значит, множество элементов нечетного порядка группы $N_{\bar{G}_\sigma}(Q)$ образует нормальную подгруппу R группы $N_{\bar{G}_\sigma}(Q)$. Следовательно, $N_{\bar{G}_\sigma}(Q) = Q \times R$, т. е. $\bar{G}_\sigma$ удовлетворяет условию **(ESyl2)** $\square$

Следующая лемма немедленно вытекает из [25, теорема 1].

Лемма 3.7. Пусть $O^{p'}(\bar{G}_\sigma) = G$ — каноническая конечная группа лиева типа и $\bar{G}$ либо имеет тип A_1 , либо имеет тип C_n , p нечетно, $q = p^\alpha$ — порядок базового поля группы G . Тогда G удовлетворяет условию **(ESyl2)** в том и только в том случае, если $q \equiv \pm 1 \pmod{8}$.

Отметим, что лемма 3.6 вместе с [25, теорема 1] и [26, теорема 6] влечет, что любая группа лиева типа над полем нечетной характеристики, отличная от группы Ри и групп из леммы 3.7, удовлетворяет **(ESyl2)**.

Лемма 3.8. Пусть $O^{p'}(\bar{G}_\sigma) \leq G \leq \bar{G}_\sigma$ — конечная присоединенная группа лиева типа с базовым полем характеристики p и порядка q . Предположим также, что группа $O^{p'}(G)$ не изоморфна группам ${}^2D_{2n}(q^2)$, ${}^3D_4(q^3)$, ${}^2B_2(2^{2n+1})$, ${}^2G_2(3^{2n+1})$, ${}^2F_4(2^{2n+1})$. Тогда существует такой максимальный σ -инвариантный тор $\bar{T}$ группы $\bar{G}$, что

- (а) $(N_{\bar{G}}(\bar{T})/\bar{T})_\sigma \simeq (N_{\bar{G}}(\bar{T}))_\sigma/(\bar{T}_\sigma) = N(\bar{G}_\sigma, \bar{T}_\sigma)/\bar{T}_\sigma \simeq W$, где $W \in \text{группа Вейля группы } \bar{G}$;
- (б) если $r \in \text{нечетный простой делитель числа } q - (\varepsilon 1)$, где $\varepsilon = +$, если G расщепленная и $\varepsilon = -$, если G скрученная, то $N(\bar{G}_\sigma, \bar{T}_\sigma)$ содержит силовскую r -подгруппу группы $\bar{G}_\sigma$;
- (в) если $r \in \text{простой делитель числа } q - (\varepsilon 1)$, и $s \in \text{такой элемент порядка } r \text{ группы } G$, что $C_{\bar{G}}(s)$ связан, то, с точностью до сопряжения элементом из G , элемент s содержится в $T = \bar{T}_\sigma \cap G$;

Тор $\bar{T}$ единственный с точностью до сопряжения в $O^{p'}(\bar{G}_\sigma)$ и $|\bar{T}_\sigma| = (q - \varepsilon 1)^n$, где $n \in \text{ранг группы } \bar{G}$.

Доказательство. Поскольку для любого максимального тора T группы $\bar{G}_\sigma$ выполнено равенство $\bar{G}_\sigma = TO^{p'}(\bar{G}_\sigma)$, без потери общности мы можем предполагать, что $G = \bar{G}_\sigma$. Если G расщепленная, то лемма легко доказывается. В этом случае $\bar{T}$ является таким максимальным тором, что $\bar{T}_\sigma \in$

подгруппа Картана группы $\overline{G}_\sigma$ (т. е. $\overline{T}$ является максимальным расщепленным тором) и (а) очевиден. Пункт (б) следует из [29, (10.1)]. Кроме того, из [29, (10.2)] следует, что порядок тора $\overline{T}_\sigma$ определен единственным образом и равен $(q-1)^n$, где $n \in \text{ранг группы } \overline{G}$. По [27, F, §6] выполнено, что любой элемент порядка r группы $\overline{T}$ содержится в $\overline{G}_\sigma$. Далее, существует такой $g \in \overline{G}$, что $s^g \in \overline{T}$, значит, $s^g \in G$. В силу связности централизатора элемента s , элементы s и s^g сопряжены в $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда они сопряжены в G , поэтому s и s^g сопряжены в G , откуда следует (в). Информация о классах максимальных торов, данная в [27, G] и [28], влечет, что, с точностью до сопряжения элементом из G , существует единственный тор $\overline{T}$ такой, что $|\overline{T}_\sigma| = (q-1)^n$.

Предположим, что $O^{p'}(G) \simeq {}^2A_n(q^2)$. Тогда $\overline{T}$ является таким максимальным тором, что $|\overline{T}_\sigma| = (q+1)^n$. Отметим, что тор $\overline{T}_\sigma$ получается из максимального расщепленного тора скручиванием элементом $w_0\sigma$. Непосредственные вычисления, с использованием [15, предложение 3.3.6] показывают, что группа $N(\overline{G}_\sigma, \overline{T}_\sigma)/\overline{T}_\sigma$ изоморфна группе $W(\overline{G})$, которая в свою очередь изоморфна Sym_{n+1} . Единственность следует из [16, предложение 8]. Пункт (б) следует из [29, (10.1)]. Для доказательства пункта (в) покажем сначала, что любой элемент порядка r из $\overline{T}$ лежит в G . Предположим, что $t \in \overline{T}$ элемент порядка r в $\overline{T}$ (напомним, что в этом случае r делит $q+1$). Пусть $\overline{H} \in \sigma$ -инвариантный максимальный расщепленный тор группы $\overline{G}$. Тор $\overline{T}_\sigma$ получен из $\overline{H}$ «скручиванием» элементом $w_0\sigma$, где $w_0 \in W(\overline{G}) \in \sigma$ единственный элемент, отображающий положительные корни в отрицательные и $\overline{T}_\sigma \simeq \overline{H}_{\sigma w_0}$. Пусть $r_1, \dots, r_n \in$ множество фундаментальных корней корневой системы A_n . Тогда t , как элемент группы $\overline{H}$, может быть записан как $h_{r_1}(\zeta_1) \cdot \dots \cdot h_{r_n}(\zeta_n)$. Далее, для любого i , мы имеем $\sigma w_0 : h_{r_i}(\lambda) \mapsto h_{-r_i}(\lambda^q) = h_{r_i}(\lambda^{-q})$, т. е. $t^{\sigma w_0} = t^{-q}$. Поскольку r делит $q+1$, мы получаем, что $t^{q+1} = e$, т. е., $t = t^{-q}$. Значит, $t^{\sigma w_0} = t$ и $t \in \overline{T}_\sigma$. Далее, как и в нескрученном случае, существует такой элемент $g \in \overline{G}$, что $s^g \in \overline{T}$, следовательно, $s^g \in \overline{T}_\sigma$. В силу связности $C_{\overline{G}}(s)$, элементы s и s^g сопряжены в G .

Для $O^{p'}(G) = {}^2D_{2n+1}(q^2)$ мы берем $\overline{T}$ равным единственному (с точностью до сопряжения в G) максимальному тору, для которого порядок $|\overline{T}_\sigma|$ равен $(q+1)^{2n+1}$ (единственность следует из [16, предложение 10]), а для $O^{p'}(G) = {}^2E_6(q^2)$ мы берем $\overline{T}$ равным единственному (вновь с точностью до сопряжения в G) максимальному тору, для которого порядок $|\overline{T}_\sigma|$ равен $(q+1)^6$ (единственность тора следует из [17, таблица 1, стр. 128]). Как в случае $G = {}^2A_n(q^2)$ легко показать, что $\overline{T}$ удовлетворяет утверждениям (а), (б) и (в) леммы. $\square$

Лемма 3.9. Пусть $G \in$ конечная группа лиева типа и $\overline{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$. Пусть $s \in$ регулярный полупростой элемент нечетного простого порядка r группы G . Тогда $N_G(C_{\overline{G}}(s)) \neq C_G(s)$.

Доказательство. Ввиду [22, предложение 2.10] мы имеем, что фактор-

группа $C_{\overline{G}}(s)/C_{\overline{G}}(s)^0$ изоморфна подгруппе группы $\Delta(\overline{G})$. Далее, если корневая система Φ группы $\overline{G}$ не равна либо A_n , либо E_6 , то $|\Delta(\Phi)|$ является степенью 2. Поскольку $\Delta(\overline{G})$ является факторгруппой группы $\Delta(\Phi(\overline{G}))$, то лемма 3.1 влечет, что $C_{\overline{G}}(s) = C_{\overline{G}}(s)^0 = \overline{T}$ является максимальным тором и $C_G(s) = C_{\overline{G}}(s) \cap G = T$. Поскольку $N_G(T) \geq N(G, T) \neq T$, мы получаем утверждение леммы в этом случае. Таким образом, можно предполагать, что либо $\Phi = A_n$, либо $\Phi = E_6$.

Предположим сначала, что $\Phi = A_n$, т. е. $O^{p'}(G) = A_n^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$. Очевидно, что $T = C_{\overline{G}}(s)^0 \cap G$ является нормальной подгруппой группы $C_G(s)$, значит, $C_G(s) \leq N(G, T)$. Предположим, что $N_G(C_{\overline{G}}(s)) = C_G(s)$. Тогда $C_G(s) = N_{N(G, T)}(C_G(s))$ и $C_G(s)/T$ является самонормализуемой подгруппой группы $N(G, T)/T$. Как мы заметили выше, $C_G(s)/T$ изоморфна подгруппе группы $\Delta(A_n)$, т. е. является циклической. По лемме 3.1, мы также получаем, что $C_G(s)/T$ является r -группой, таким образом, $C_G(s)/T = \langle x \rangle$ для некоторого r -элемента $x \in N(G, T)/T$. Таким образом, $\langle x \rangle$ является картеровой подгруппой группы $N(G, T)/T$. Далее, ввиду [15, предложение 3.3.6], выполнено $N(G, T)/T \simeq C_{W(\overline{G})}(y)$ для некоторого $y \in W(\overline{G}) \simeq \text{Sym}_{n+1}$. Ясно, что $C_{C_{W(\overline{G})}(y)}(x)$ содержит y . Таким образом, y должен быть r -элементом, в противном случае $N_{C_{W(\overline{G})}(y)}(\langle x \rangle)$ содержал бы элемент y порядка взаимно простого с r , т. е. $N_{C_{W(\overline{G})}(y)}(\langle x \rangle) \neq \langle x \rangle$. Противоречие с тем, что $\langle x \rangle$ есть картерова подгруппа группы $C_{W(\overline{G})}(y)$.

Далее пусть $y = \tau_1 \dots \in$ разложение элемента y в произведение независимых циклов и $l_1, \dots \in$ длины циклов $\tau_1, \dots$ соответственно. Предположим сначала, что m_1 циклов имеют одинаковую длину l_1 , m_2 имеют длину l_2 и т. д. Пусть $m_0 = n + 1 - (l_1 m_1 + \dots + l_k m_k)$. Тогда

$$C_{W(\overline{G})}(y) \simeq (Z_{l_1} \wr \text{Sym}_{m_1}) \times \dots \times (Z_{l_k} \wr \text{Sym}_{m_k}) \times \text{Sym}_{m_0},$$

где $Z_{l_i} \in$ циклическая группа порядка l_i . Если $m_j > 1$ для некоторого $j \geq 0$, то существует такая нормальная подгруппа N группы $C_{W(\overline{G})}(y)$ что $C_{W(\overline{G})}(y)/N \simeq \text{Sym}_{m_j} \neq \{e\}$. Ввиду таблиц [9, таблица] и [10, таблица] мы получаем, что картеровы подгруппы в группе S , удовлетворяющей условию $\text{Alt}_\ell \leq S \leq \text{Aut}(\text{Alt}_\ell)$, сопряжены для всех $\ell \geq 5$. Таким образом, группы $C_{W(\overline{G})}(y)$, N удовлетворяют условию **(C)** и $\langle x \rangle \in$ единственная, с точностью до сопряжения, картерова подгруппа в $C_{W(\overline{G})}(y)$. По лемме 2.3 мы получаем, что $\langle x \rangle$ отображается на картерову подгруппу группы $C_{W(\overline{G})}(y)/N \simeq \text{Sym}_{m_j}$. Ввиду [2] только силовская 2-подгруппа группы Sym_{m_j} может быть картеровой подгруппой группы Sym_{m_j} . Противоречие с тем, что x является r -элементом и r нечетно.

Таким образом, мы можем предполагать, что $C_{W(\overline{G})}(y) \simeq (Z_{l_1} \times \dots \times Z_{l_k})$ и $l_i \neq l_j$ если $i \neq j$. Из известного строения максимальных торов и их нормализаторов в группе $A_n^\varepsilon(q)$ (см., например, [16, предложения 7,8]) мы получаем строение групп T и $N(G, T)$, которое мы поясним с помощью матриц. Везде ниже группа $GL_n^\varepsilon(q)$ изоморфна

$GL_n(q)$, если $\varepsilon = +$ и изоморфна $GU_n(q)$, если $\varepsilon = -$. Для разложения $l_1 + l_2 + \dots + l_k = n + 1$ в группе $GL_{n+1}^\varepsilon(q)$ рассмотрим группу L , состоящую из клеточно-диагональных матриц вида

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{pmatrix},$$

где $A_i \in GL_{l_i}^\varepsilon(q)$. Тогда $L \simeq GL_{l_1}^\varepsilon(q) \times \dots \times GL_{l_k}^\varepsilon(q)$. Обозначим для краткости $GL_{l_i}^\varepsilon(q)$ через G_i . В каждой из групп G_i рассмотрим цикл Зингера T_i . Хорошо известно, что $N_{G_i}(T_i)/T_i \in$ циклическая группа порядка l_i и $N(G_i, T_i) = N_{G_i}(T_i)$. Существует такая подгруппа Z группы $Z(SL_{n+1}^\varepsilon(q))$, что $O^{p'}(G) \simeq SL_{n+1}^\varepsilon(q)/Z$. Тогда $T \simeq ((T_1 \times \dots \times T_k) \cap SL_{n+1}^\varepsilon(q))/Z$ и $N(G, T) \simeq ((N(G_1, T_1) \times \dots \times N(G_k, T_k)) \cap SL_{n+1}^\varepsilon(q))/Z$. Поскольку для любого цикла Зингера T_i группа $N(G_i, T_i)/T_i$ циклическая, мы можем предполагать, что $N(G, T) = C_G(s)$ и T является циклом Зингера, т. е. является циклической группой порядка $\frac{q^{n+1} - (\varepsilon 1)^{n+1}}{q - (\varepsilon 1)}$ и $n + 1 = r^k$ для некоторого $k \geq 1$ (последнее равенство выполнено потому, что $N(G, T)/T$ является r -группой). Но $q^{r^k} \equiv q \pmod{r}$, следовательно, r делит $q - (\varepsilon 1)$. По лемме 3.8 мы получаем, что s лежит в $N(G, H)$, где $H \in$ такой максимальный тор, что факторгруппа $N(G, H)/H$ изоморфна Sym_{n+1} и $|H| = (q - \varepsilon 1)^n$. В частности, H не является циклом Зингера. Если $s \in H$, то это немедленно влечет противоречие с выбором s . Если $s \notin H$, то, поскольку порядок элемента s прост, пересечение $\langle s \rangle \cap H$ тривиально. Значит, относительно естественного гомоморфизма $N(G, H) \rightarrow N(G, H)/H \simeq \text{Sym}_{n+1}$ элемент s отображается в элемент порядка r . Однако, в группе Sym_{n+1} любой элемент нечетного порядка сопряжен со своим обратным. Таким образом, существует 2-элемент z группы G , нормализующий, но не централизующий группу $\langle s \rangle$. Следовательно, $z \leq N_{\overline{G}}(C_{\overline{G}}(s)) \leq N_{\overline{G}}(C_{\overline{G}}(s)^0)$ и $|N(G, T)/T|$ делится на 2, что противоречит доказанному выше утверждению о том, что $N(G, T)/T$ является r -группой. Это последнее противоречие завершает разбор случая $\Phi(\overline{G}) = A_n$.

В оставшемся случае $\Phi = E_6$ легко проверить, что для любого $y \in W(E_6)$, группа $C_{W(E_6)}(y)$ не содержит картеровых подгрупп порядка 3. Действительно, если в $C_{W(E_6)}(y)$ есть картерова подгруппа порядка 3, то она порождается элементом y . Однако хорошо известно (и можно легко проверить с помощью [28, таблица 9]), что в $W(E_6)$ нет элементов порядка 3, централизатор которых также имеет порядок 3. Поскольку $|C_G(s)/T|$ делит 3 и группа $C_G(s)/T$ является картеровой подгруппой в $C_{W(E_6)}(y)$ для некоторого y , мы получаем противоречие. $\square$

4 Полулинейные группы лиева типа

Теперь мы определим некоторые надгруппы конечных групп лиева типа. Сначала мы дадим более подробное описание отображения Фробениуса σ . Отметим, что все отображения, рассматриваемые в данном параграфе, являются автоморфизмами, если группу $\overline{G}$ рассматривать как абстрактную группу и эндоморфизмами, если ее рассматривать как алгебраическую группу. Поскольку мы используем отображения для построения связанных автоморфизмов в конечных группах и группах над алгебраически замкнутым полем, мы считаем уместным в данном параграфе называть все отображения автоморфизмами. Пусть $\overline{G} \in$ простая связная линейная алгебраическая группа присоединенного типа над алгебраически замкнутым полем $\overline{\mathbb{F}}_p$ положительной характеристики p . Везде далее, если не оговорено противное, мы будем рассматривать группы присоединенного типа. Выберем подгруппу Бореля $\overline{B}$ группы $\overline{G}$, пусть $\overline{U} = R_u(\overline{B}) \in$ унипотентный радикал группы $\overline{B}$. Существует подгруппа Бореля $\overline{B}^-$, удовлетворяющая равенству $\overline{B} \cap \overline{B}^- = \overline{T}$, где $\overline{T} \in$ максимальный тор группы $\overline{B}$ (значит, и группы $\overline{G}$). Пусть $\Phi \in$ корневая система группы $\overline{G}$ и пусть $\{X_r \mid r \in \Phi^+\} \in$ множество $\overline{T}$ -инвариантных 1-мерных корневых подгрупп группы $\overline{U}$. Каждая X_r изоморфна аддитивной группе поля $\overline{\mathbb{F}}_p$, значит, любой элемент группы X_r можно записать как $x_r(t)$, где $t \in$ образ элемента $x_r(t)$ относительно этого изоморфизма. Обозначим через $\overline{U}^- = R_u(\overline{B}^-)$ унипотентный радикал группы $\overline{B}^-$. Как и выше, определим $\overline{T}$ -инвариантные 1-мерные подгруппы $\{\overline{X}_r \mid r \in \Phi^-\}$ группы $\overline{U}^-$. Тогда $\overline{G} = \langle \overline{U}, \overline{U}^- \rangle$. Пусть $\bar{\varphi} \in$ полевой автоморфизм группы $\overline{G}$ (как абстрактной группы) и $\bar{\gamma} \in$ графовый автоморфизм группы $\overline{G}$. Известно, что $\bar{\varphi}$ можно выбрать так, что он действует по правилу $x_r(t)^{\bar{\varphi}} = x_r(t^p)$ (см., например, [12, 12.2] и [15, 1.7]). Ввиду [12, предложения 12.2.3 и 12.3.3], мы можем выбрать $\bar{\gamma}$ так, что он действует по правилу $x_r(t)^{\bar{\gamma}} = x_{\bar{r}}(t)$, если Φ не содержит корней различной длины, и по правилу $x_r(t)^{\bar{\gamma}} = x_{\bar{r}}(t^{\lambda_r})$ для подходящего $\lambda_r \in \{1, 2, 3\}$, если Φ содержит корни различной длины. Здесь $\bar{r} \in$ это образ корня r относительно симметрии ρ (соответствующей авто-

морфизму $\bar{\gamma}$) корневой системы Φ . В обоих случаях мы можем записать $x_r(t)^{\bar{\gamma}} = x_{\bar{r}}(t^{\lambda_r})$, где $\lambda_r \in \{1, 2, 3\}$. Из этих формул видно, что $\bar{\varphi} \cdot \bar{\gamma} = \bar{\gamma} \cdot \bar{\varphi}$. Пусть $n_r(t) = x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t)$ и $\bar{N} = \langle n_r(t) \mid r \in \Phi, t \in \bar{\mathbb{F}}_p^* \rangle$. Пусть $h_r(t) = n_r(t)n_r(-1)$ и $\bar{H} = \langle h_r(t) \mid r \in \Phi, t \in \bar{\mathbb{F}}_p^* \rangle$. Ввиду [12, главы 6 и 7], $\bar{H}$ есть максимальный тор группы $\bar{G}$, $\bar{N} = N_{\bar{G}}(\bar{H})$, и подгруппы $\bar{X}_r$ являются корневыми подгруппами относительно $\bar{H}$. Значит, мы можем заменить $\bar{T}$ на $\bar{H}$ и предполагать, что относительно нашего выбора тор $\bar{T}$ является $\bar{\varphi}$ - и $\bar{\gamma}$ -инвариантным. Более того, $\bar{\varphi}$ индуцирует тривиальный автоморфизм факторгруппы $\bar{N}/\bar{H}$.

Аutomорфизм $\bar{\varphi}^k$, где $k \in \mathbb{N}$ называется *классическим автоморфизмом Фробениуса*. Мы будем называть автоморфизм σ *автоморфизмом Фробениуса*, если σ сопряжен относительно $\bar{G}$ с $\bar{\gamma}^\epsilon \bar{\varphi}^k$, $\epsilon \in \{0, 1\}$, $k \in \mathbb{N}$. Из теоремы Ленга-Стейнберга [19, теорема 10.1] следует, что для любого $\bar{g} \in \bar{G}$ элементы σ и $\sigma\bar{g}$ сопряжены относительно $\bar{G}$. Таким образом, ввиду [19, 11.6], мы имеем, что отображение Фробениуса, определенное в предыдущем параграфе, совпадает с автоморфизмом Фробениуса, определенным здесь.

Далее, зафиксируем $\bar{G}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{\gamma}$, и $\sigma = \bar{\gamma}^\epsilon \bar{\varphi}^k$; и предположим, что $|\bar{\gamma}| \leq 2$, т. е. мы не рассматриваем тройственный автоморфизм группы $\bar{G}$ с корневой системой $\Phi(\bar{G}) = D_4$. Положим $B = \bar{B}_\sigma$, $H = \bar{H}_\sigma$, и $U = \bar{U}_\sigma$. Поскольку $\bar{B}$, $\bar{H}$, и $\bar{U}$ являются $\bar{\varphi}$ - и $\bar{\gamma}$ -инвариантными, они дают нам соответственно подгруппу Бореля, подгруппу Картана и максимальную унипотентную подгруппу (силовскую p -подгруппу) группы $\bar{G}_\sigma$ (см. более подробно [15, 1.7ч1.9] или [18, глава 2]).

Предположим, что $\epsilon = 0$, т. е. $O^{p'}(\bar{G}_\sigma)$ нескручена (расщепленная). Тогда $U = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \rangle$, где X_r изоморфна аддитивной группе поля $GF(p^k) = GF(q)$ и любой элемент группы X_r может быть записан в виде $x_r(t)$, $t \in GF(q)$. Положим также $U^- = \bar{U}_\sigma^-$. Как и для U , мы можем записать $U^- = \langle X_r \mid r \in \Phi^- \rangle$ и любой элемент группы X_r может быть записан в виде $x_r(t)$, $t \in GF(q)$. Далее мы можем определить автоморфизм φ как ограничение автоморфизма $\bar{\varphi}$ на $\bar{G}_\sigma$ и автоморфизм γ как ограничение автоморфизма $\bar{\gamma}$ на $\bar{G}_\sigma$. По определению выполнены

равенства $x_r(t)^\varphi = x_r(t^p)$ и $x_r(t)^\gamma = x_r(t^{\lambda_r})$ для всех $r \in \Phi$ (смотри определение автоморфизма $\bar{\gamma}$ выше). Определим автоморфизм ζ группы $\bar{G}_\sigma$ равным $\zeta = \gamma^\varepsilon \varphi^\ell$, $\varphi^\ell \neq e$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, и автоморфизм $\bar{\zeta}$ группы $\bar{G}$ равным $\bar{\zeta} = \bar{\gamma}^\varepsilon \cdot \bar{\varphi}^\ell$. Выберем ζ -инвариантную подгруппу G , удовлетворяющую условию $O^{p'}(\bar{G}_\sigma) \leq G \leq \bar{G}_\sigma$. Заметим, что если корневая система Φ группы $\bar{G}$ не равна D_{2n} , то факторгруппа $\bar{G}_\sigma / (O^{p'}(\bar{G}_\sigma))$ циклическая. Таким образом, для большинства групп и автоморфизмов, кроме групп типа D_{2n} над полем нечетной характеристики, любая подгруппа G группы $\bar{G}_\sigma$, удовлетворяющая $O^{p'}(\bar{G}_\sigma) \leq G \leq \bar{G}_\sigma$, является γ - и φ -инвариантной. Определим ΓG как множество подгрупп вида $\langle G, \zeta g \rangle \leq \bar{G}_\sigma \rtimes \langle \zeta \rangle$, где $g \in \bar{G}_\sigma$, $\langle \zeta g \rangle \cap \bar{G}_\sigma \leq G$, и $\Gamma \bar{G}$ как множество подгрупп вида $\bar{G} \rtimes \langle \bar{\zeta} \rangle$. Следуя [18, определение 2.5.13], будем называть автоморфизм ζ *полевым*, если $\varepsilon = 0$, т. е. $\zeta = \varphi^\ell$ и *графово-полевым* в остальных случаях (напомним, что мы предполагаем $\varphi^\ell \neq e$).

Предположим теперь, что $\epsilon = 1$, т. е. $O^{p'}(\bar{G}_\sigma)$ скручена. Тогда $U = \bar{U}_\sigma$ и $U^- = \bar{U}_\sigma^-$. Определим φ на $U^\pm$ как сужение автоморфизма $\bar{\varphi}$ на $U^\pm$. Поскольку $O^{p'}(\bar{G}_\sigma) = \langle U^+, U^- \rangle$, мы получаем автоморфизм φ группы $O^{p'}(\bar{G}_\sigma)$. Рассмотрим $\zeta = \varphi^\ell \neq e$, и пусть $G \in \zeta$ -инвариантная группа, удовлетворяющая условию $O^{p'}(\bar{G}_\sigma) \leq G \leq \bar{G}_\sigma$. Тогда $\bar{\zeta} = \bar{\varphi}^\ell$ является автоморфизмом группы $\bar{G}$. Определим ΓG как множество подгрупп вида $\langle G, \zeta g \rangle \leq \bar{G}_\sigma \rtimes \langle \zeta \rangle$, где $g \in \bar{G}_\sigma$, $\langle \zeta g \rangle \cap \bar{G}_\sigma \leq G$, и $\Gamma \bar{G}$ как множество подгрупп вида $\bar{G} \rtimes \langle \bar{\zeta} \rangle$. Следуя [18, определение 2.5.13], мы будем говорить, что автоморфизм ζ является *полевым*, если $|\zeta|$ не делится на $|\gamma|$ (это определение будет использоваться и в том случае, если $|\gamma| = 3$ и $\bar{G}_\sigma \simeq {}^3D_4(q^3)$), и что автоморфизм ζ является *графовым* в остальных случаях.

Группы из множества ΓG , определенного выше, называются *полулинейными конечными группами лиева типа* (они называются также *полулинейными каноническими конечными группами лиева типа*, если $G = O^{p'}(\bar{G}_\sigma)$), а группы из множества $\Gamma \bar{G}$ называются *полулинейными алгебраическими группами*. Заметим, что $\Gamma \bar{G}$ нельзя определить без ΓG , поскольку нам необходимо знание того, что $\varphi^\ell \neq e$. Если G записана в обозначениях из [12], т. е. $O^{p'}(G) = G = A_n(q)$ или $O^{p'}(G) = G = {}^2A_n(q^2)$

и т. д., то мы будем записывать ΓG как $\Gamma A_n(q)$, $\Gamma^2 A_n(q^2)$, и т. д.

Рассмотрим $A \in \Gamma G$ и $x \in A \setminus G$. Тогда $x = \zeta^k y$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и $y \in \overline{G}_\sigma$. Определим $\bar{x}$ равным $\bar{\zeta}^k y$. Обратно, если $\bar{x} = \bar{\zeta}^k y$ для некоторого $y \in \overline{G}_\sigma$, $\zeta^k \neq e$ и $\langle \zeta^k y \rangle \cap \overline{G}_\sigma \leq G$, определим x равным $\zeta^k y$. Заметим, что нам не нужно предполагать, что $\bar{x} \notin \overline{G}$ поскольку $|\bar{\zeta}| = \infty$. Если $x \in G$, полагаем $\bar{x} = x$.

Лемма 4.1. *В о введенных выше обозначениях пусть X — подгруппа группы G . Тогда x нормализует X в том и только в том случае, когда $\bar{x}$ нормализует X как подгруппу группы $\overline{G}$.*

Доказательство. Поскольку ζ является ограничением автоморфизма $\bar{\zeta}$ на G наше утверждение тривиально. $\square$

Пусть $X_1 \in$ подгруппа группы $A \in \Gamma G$. Тогда X_1 порождается нормальной подгруппой $X = X_1 \cap G$ и элементом $x = \zeta^k y$. Ввиду леммы 4.1, мы можем рассмотреть подгруппу $\overline{X}_1 = \langle \bar{x}, X \rangle$ группы $\overline{G} \rtimes \langle \bar{\zeta} \rangle$. Далее, мы находим разумным объяснить, почему мы используем столь запутанные обозначения и определения. Мы имеем, что порядок элемента ζ всегда конечен, но порядок элемента $\bar{\zeta}$ всегда бесконечен. Таким образом, даже если $Z(G)$ тривиален, мы не можем рассматривать $G \rtimes \langle \bar{\zeta} \rangle$ как подгруппу группы $\text{Aut}(G)$. Следовательно, нам нужно определить каким-нибудь образом (один возможный способ только что дан) связь между элементами из $\text{Aut}(G)$ и элементами из $\text{Aut}(\overline{G})$ для того, чтобы использовать технику линейных алгебраических групп.

Пусть $\overline{R} \in$ σ -инвариантный максимальный тор (соотв. редуктивная подгруппа максимального ранга, параболическая подгруппа) группы $\overline{G}$, и элемент $y \in N_{\overline{G} \rtimes \langle \bar{\zeta} \rangle}(\overline{R})$, выбран так, что существует элемент $x \in \langle G, \zeta g \rangle$, удовлетворяющий равенству $y = \bar{x}$. Тогда $R_1 = \langle x, \overline{R} \cap G \rangle$ называется *максимальным тором* (соотв. *редуктивной подгруппой максимального ранга, параболической подгруппой*) группы $\langle G, \zeta g \rangle$.

Лемма 4.2. *Пусть $M = \langle x, X \rangle$, где $X = M \cap G \trianglelefteq M$ — такая подгруппа группы $\langle G, \zeta g \rangle$, что подгруппа $O_p(X)$ нетривиальна. Тогда существует такая σ - и $\bar{x}$ -инвариантная параболическая подгруппа $\overline{P}$ группы $\overline{G}$, что $X \leq \overline{P}$ и $O_p(X) \leq R_u(\overline{P})$.*

Доказательство. Определим $U_0 = O_p(X)$, $N_0 = N_{\overline{G}}(U_0)$. Тогда $U_i = U_0 R_u(N_{i-1})$ и $N_i = N_{\overline{G}}(U_i)$. Очевидно U_i, N_i являются $\bar{x}$ - и σ -инвариантными для всех i . Ввиду [13, предложение 30.3], цепь подгрупп $N_0 \leq N_1 \leq \dots \leq N_k \leq \dots$ конечна и $\overline{P} = \cup_i N_i$ является собственной параболической подгруппой группы $\overline{G}$. Очевидно, что $\overline{P}$ является σ - и $\bar{x}$ -инвариантной, $X \leq \overline{P}$ и $O_p(X) \leq R_u(\overline{P})$. $\square$

Лемма 4.3. Пусть G — конечная присоединенная группа лиева типа над полем нечетной характеристики p . Предположим, что $\overline{G}$ и σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$. Пусть ψ — полевой автоморфизм нечетного порядка группы $O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$.

Тогда ψ централизует некоторую силовскую 2-подгруппу группы G , и существует такая ψ -инвариантная подгруппа Картана H , что ψ централизует силовскую 2-подгруппу группы H . Более того, если $G \not\cong {}^2G_2(3^{2n+1}), {}^3D_4(q^3), {}^2D_{2n}(q^2)$, то существует такой ψ -инвариантный максимальный тор T группы G , что ψ централизует силовскую 2-подгруппу тора T , и факторгруппа $N(G, T)/T$ изоморфна $N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать лемму лишь для случая $G = \overline{G}_\sigma$. Предположим, что $|\psi| = k$. Пусть $GF(q) \in$ базовое поле группы G . Тогда $q = p^\alpha$ и $\alpha = k \cdot m$. Далее, $|G|$ можно записать в виде $|G| = q^N(q^{m_1} + \varepsilon_1 1) \cdot \dots \cdot (q^{m_n} + \varepsilon_n 1)$ для некоторого N , где $n \in$ это ранг группы $\overline{G}$, $\varepsilon_i = \pm$ (см. [12, теоремы 9.4.10 и 14.3.1]). Аналогично мы имеем, что $|G_\psi| = (p^m)^N((p^m)^{m_1} + \varepsilon_1 1) \cdot \dots \cdot ((p^m)^{m_n} + \varepsilon_n 1)$. Так как k нечетно, то $((p^{km})^{m_i} + \varepsilon_i 1)_2 = ((p^m)^{m_i} + \varepsilon_i 1)_2$ для всех i , т. е. $|G|_2 = |G_\psi|_2$ и силовская 2-подгруппа группы G_ψ является силовской 2-подгруппой группы G . В силу [18, предложение 2.5.17] существует такой автоморфизм ψ_1 группы $\overline{G}$, что $\sigma = \psi_1^k$ и ψ совпадает с ограничением ψ_1 на $\overline{G}_\sigma$. Отметим, что ψ_1 , вообще говоря, не совпадает с автоморфизмом $\bar{\psi}$, определенным выше. Рассмотрим максимальный расцепленный тор $\overline{H}_{\psi_1}$ группы $\overline{G}_{\psi_1}$. Тогда $H = \overline{H}_\sigma \in \psi$ -инвариантная подгруппа Картана группы G . Поскольку $|H| = (q^{k_1} + \varepsilon_1 1) \cdot \dots \cdot (q^{k_l} + \varepsilon_l 1)$, где $\varepsilon_i = \pm$, равенство $|H|_2 = |H_\psi|_2$ доказывается аналогично.

Предположим теперь, что $G \not\cong {}^2G_2(3^{2n+1}), {}^3D_4(q^3), {}^2D_{2n}(q^2)$. По лемме 3.8 существует такой максимальный тор T группы G_ψ , что $N(G_\psi, T)/T \simeq N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T}$ и $|T_\psi| = (p^m - \varepsilon 1)^n$. Поскольку $|\psi|$ нечетен и $\overline{T}_{\psi_1}$ получен скручиванием максимального расцепленного тора $\overline{H}$ с помощью элемента w_0 , то $\overline{T}_\sigma$ также получен скручиванием максимального расцепленного тора $\overline{H}$ элементом w_0 (см. доказательство леммы 3.6). Следовательно, $|\overline{T}_\sigma| = (q - \varepsilon 1)^n$, $|\overline{T}_{\psi_1}| = (p^m - \varepsilon 1)^n$, значит $|\overline{T}_\sigma|_2 = |T|_2 = |T_\psi|_2$. $\square$

Лемма 4.4. [29, (7-2)] Пусть $\overline{G}$ — связная простая линейная алгебраическая группа присоединенного типа над полем характеристики p , $\sigma \in$ отображение Фробениуса группы $\overline{G}$ и $G = \overline{G}_\sigma \in$ конечная группа лиева типа. Пусть $\varphi \in$ полевой или графово-полевой автоморфизм группы G и $\varphi' \in$ такой элемент из $(G \rtimes \langle \varphi \rangle) \setminus G$, что $|\varphi'| = |\varphi|$ и $G \rtimes \langle \varphi \rangle = \langle G, \varphi' \rangle =$

$G \rtimes \langle \varphi' \rangle$. Тогда существует такой элемент $g \in G$, что $\langle \varphi \rangle^g = \langle \varphi' \rangle$. В частности, если $G/O^{p'}(G) \in 2$ -группа и φ нечетного порядка, то g можно выбрать в $O^{p'}(G)$.

Лемма 4.5. Пусть G — конечная присоединенная группа лиева типа над полем нечетной характеристики, $G \not\cong {}^3D_4(q^3)$ и $\bar{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\bar{G}_\sigma) \leq G \leq \bar{G}_\sigma$. Пусть $A \in$ такая подгруппа группы $\text{Aut}(O^{p'}(\bar{G}_\sigma))$, что $A \cap \bar{G}_\sigma = G$. Если $O^{p'}(G) \simeq D_4(q)$, предположим также, что A содержится в группе, порожденной внутренне-диагональными и полевыми автоморфизмами и графовым автоморфизмом порядка 2. Тогда A удовлетворяет условию **(ESyl2)** в том и только в том случае, если G удовлетворяет условию **(ESyl2)**.

Доказательство. Предположим, что G удовлетворяет условию **(ESyl2)**. В условиях леммы факторгруппа A/G абелева, поэтому $A/G = \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$, где $\bar{A}_1 \in$ холлова $2'$ -подгруппа группы A/G и $\bar{A}_2 \in$ силовская 2-подгруппа группы A/G . Обозначим через A_1 полный прообраз группы $\bar{A}_1$ в A . Если A_1 удовлетворяет условию **(ESyl2)**, то по лемме 2.9 группа A также удовлетворяет условию **(ESyl2)**. Таким образом, можно считать, что порядок $|A/G|$ нечетен. Поскольку мы предполагаем, что графовый автоморфизм порядка 3 не содержится в A , то группа A/G циклическая, значит $A = \langle G, \psi g \rangle$, где $\psi \in$ полевой автоморфизм нечетного порядка, а $g \in \bar{G}_\sigma$. Поскольку $|A : G| = |\psi|$ нечетен, можно считать, что $|\psi g|$ также нечетен. В силу леммы 4.3, ψ централизует некоторую силовскую 2-подгруппу группы $\bar{G}_\sigma$, следовательно, $g \in$ элемент нечетного порядка. Далее факторгруппа $\bar{G}_\sigma/G$ абелева и может быть представлена в виде $\bar{L} \times \bar{Q}$, где $\bar{L} \in$ холлова $2'$ -подгруппа группы $\bar{G}_\sigma/G$ и $\bar{Q} \in$ силовская 2-подгруппа группы $\bar{G}_\sigma/G$. Пусть $L \in$ полный прообраз группы $\bar{L}$ в $\bar{G}_\sigma$ относительно естественного гомоморфизма. Тогда $g \in L$. Рассмотрим группу $L \rtimes \langle \psi \rangle \geq A$. По построению, индекс $|L \rtimes \langle \psi \rangle : A| = |L : G|$ нечетен. В силу леммы 3.6 группа L удовлетворяет условию **(ESyl2)**. По лемме 4.3 полевой автоморфизм ψ централизует силовскую 2-подгруппу Q группы L . Таким образом,

$$N_{L \rtimes \langle \psi \rangle}(Q) = N_L(Q) \times \langle \psi \rangle = QC_L(Q) \times \langle \psi \rangle = QC_{L \rtimes \langle \psi \rangle}(Q),$$

т. е. группа $L \rtimes \langle \psi \rangle$ удовлетворяет **(ESyl2)**. Поскольку $|L \rtimes \langle \psi \rangle : A|$ нечетен, то A удовлетворяет **(ESyl2)**.

Предположим теперь что A удовлетворяет **(ESyl2)**. Если G не удовлетворяет **(ESyl2)**, то [25, теорема 1] и [26, теорема 6] влекут, что корневая система группы $\bar{G}$ либо имеет тип A_1 , либо имеет тип C_n . В обоих случаях группа $\text{Aut}(O^{p'}(\bar{G}_\sigma))/\bar{G}_\sigma$ циклическая и порождается полевым автоморфизмом φ . Кроме того, из [25, теорема 1] следует, что порядок базового поля (которое совпадает с полем определения в этом случае, поскольку группа G не является скрученной) равен $q = p^t$ и $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$. Следовательно, t нечетно и, значит, $|\text{Aut}(O^{p'}(\bar{G}_\sigma))/\bar{G}_\sigma|$ нечетен. Поэтому $|A : G|$ нечетен, значит, G удовлетворяет **(ESyl2)**. $\square$

Следующая лемма для классических групп известна (см., например, [30]).

Лемма 4.6. Пусть G — конечная присоединенная расщепленная группа лиева типа, $\bar{G}$, σ выбраны так, что $Op'(\bar{G}_\sigma) \leq G \leq \bar{G}_\sigma$. Предположим, что τ является графовым автоморфизмом порядка 2 группы $Op'(G)$. Тогда любой полупростой элемент $s \in G$ сопряжен со своим обратным в группе $\langle Op'(\bar{G}_\sigma), \tau a \rangle$, где $a \in$ произвольный элемент из $\bar{G}_\sigma$.

Доказательство. Если $\Phi(\bar{G})$ не имеет тип A_n, D_{2n+1}, E_6 , то лемма следует из [10, лемма 2.2], таким образом, нам нужно рассматривать группы типа A_n, D_{2n+1}, E_6 . Обозначим через $\bar{\tau}$ графовый автоморфизм группы $\bar{G}$ такой, что $\bar{\tau}|_G = \tau$. Пусть $\bar{T} \in$ такой максимальный σ -инвариантный тор группы $\bar{G}$, что $\bar{T}_\sigma \cap G$ является подгруппой Картана группы G . Пусть $r_1, \dots, r_n \in$ фундаментальные корни корневой системы $\Phi(\bar{G})$ и $\rho \in$ симметрия, соответствующая $\bar{\tau}$. Обозначим r_i^ρ через $\bar{r}_i$. Тогда $\bar{T} = \langle h_{r_i}(t_i) \mid 1 \leq i \leq n, t_i \neq 0 \rangle$ и $h_{r_i}(t_i)^{\bar{\tau}} = h_{\bar{r}_i}(t_i)$. Обозначим через W группу Вейля группы $\bar{G}$. Пусть $w_0 \in$ единственный элемент группы W , отображающий все положительные корни в отрицательные корни, и пусть $n_0 \in$ его прообраз в $N_{\bar{G}}(\bar{T})$ относительно естественного гомоморфизма $N_{\bar{G}}(\bar{T}) \rightarrow N_{\bar{G}}(\bar{T})/\bar{T} \simeq W$. Поскольку σ действует тривиально на $W = N(G, T)/T$ (см. лемму 3.8), мы можем выбрать $n_0 \in G$, т. е. $n_0^\sigma = n_0$. Тогда для всех r_i и t мы получаем, что

$$h_{r_i}(t)^{n_0 \bar{\tau}} = h_{r_i^{w_0 \rho}}(t) = h_{-r_i}(t) = h_{r_i}(t^{-1}).$$

Таким образом, $x^{n_0 \bar{\tau}} = x^{-1}$ для всех $x \in \bar{T}$.

Далее пусть $s \in$ полупростой элемент группы G . Тогда существует максимальный σ -инвариантный тор $\bar{S}$ группы $\bar{G}$, содержащий s . Поскольку все максимальные торы группы $\bar{G}$ сопряжены, мы получаем, что существует такой $g \in \bar{G}$, что $\bar{S}^g = \bar{T}$. Так как $\bar{G}_\sigma = Op'(\bar{G}_\sigma)\bar{T}_\sigma$, то можно считать, что $a \in \bar{T}_\sigma$. Следовательно, $s^{gn_0 \bar{\tau} a g^{-1}} = s^{-1}$. Поскольку $n_0^\sigma = n_0$ и $\bar{\tau}^\sigma = \bar{\tau}$, мы имеем, что $(gn_0 \bar{\tau} a g^{-1})^\sigma = g^\sigma n_0 \bar{\tau} a (g^{-1})^\sigma$. Более того, поскольку $\bar{S}$ является σ -инвариантным, то для любого $x \in \bar{S}$ выполнено $x^{gn_0 \bar{\tau} a g^{-1}} = x^{g^\sigma n_0 \bar{\tau} a (g^{-1})^\sigma} = x^{-1}$, т. е. $gn_0 \bar{\tau} a g^{-1} \bar{S} = g^\sigma n_0 \bar{\tau} a (g^{-1})^\sigma \bar{S}$. В частности, существует такой элемент $t \in \bar{S}$, что $gn_0 \bar{\tau} a g^{-1} t = g^\sigma n_0 \bar{\tau} a (g^{-1})^\sigma$. Ввиду теоремы Ленга-Стейнберга [19, теорема 10.1] существует такой элемент $y \in \bar{S}$, что $t = y \cdot (y^{-1})^\sigma$. Следовательно, $gn_0 \bar{\tau} a g^{-1} y = (gn_0 \bar{\tau} a g^{-1} y)^\sigma$, т. е. $gn_0 \bar{\tau} a g^{-1} y \in \bar{G}_\sigma \lambda \langle \tau \rangle$, и $s^{gn_0 \bar{\tau} a g^{-1}} y = s^{-1}$. Поскольку $Op'(\bar{G}_\sigma)\bar{S}_\sigma = \bar{G}_\sigma$, и подгруппа $\bar{S}_\sigma$ абелева, мы можем найти такой элемент $z \in \bar{S}_\sigma$, что $gn_0 \bar{\tau} a g^{-1} y z \in \langle Op'(\bar{G}_\sigma), \tau a \rangle$. $\square$

Лемма 4.7. Пусть $\langle G, \zeta g \rangle \in$ конечная полулинейная группа лиева типа и $\bar{G}$, σ выбраны так, что $Op'(\bar{G}_\sigma) \leq G \leq \bar{G}_\sigma$. Пусть $s \in$ регулярный полупростой элемент нечетного простого порядка группы G . Тогда $N_{\langle G, \zeta g \rangle}(C_{\langle G, \zeta g \rangle}(s)) \neq C_{\langle G, \zeta g \rangle}(s)$.

Доказательство. Так как элемент s полупрост, существует σ -инвариантный максимальный тор $\bar{S}$ группы $\bar{G}$, содержащий s . Поскольку $\bar{G}_\sigma = O^{p'}(\bar{G}_\sigma)\bar{S}_\sigma$, то можно считать, что $g \in \bar{S}_\sigma$, т. е. элементы g и s перестановочны. Если $C_{\langle G, \zeta g \rangle}(s)G \neq \langle G, \zeta g \rangle$, то группу $\langle G, \zeta g \rangle$ можно заменить группой $C_{\langle G, \zeta g \rangle}(s)G$ и доказывать лемму для этой группы. Кроме того, если $C_{\langle G, \zeta g \rangle}(s) = C_G(s)$, то лемма следует из леммы 3.9, поэтому можно считать, что ζ централизует s . Если либо группа G не является скрученной, либо $|\zeta|$ нечетен, то из [18, предложение 2.5.17] следует, что существует такой $\zeta_1 \in \text{Aut}(\bar{G})$, что $\sigma = \zeta_1^k$ для некоторого $k > 0$ и ζ является ограничением автоморфизма ζ_1 на G . По лемме 3.9 существует элемент из $N_{G_{\zeta g}}(C_{\bar{G}}(s))$, не лежащий в $C_{G_{\zeta g}}(s)$, откуда следует лемма.

Предположим, что группа G является скрученной и $|\zeta|$ четен. Тогда $\sigma = \bar{\gamma}\bar{\varphi}^k$, $\bar{\zeta} = \bar{\varphi}^\ell$, где ℓ делит k . Следовательно, элемент s лежит в $\bar{G}_{\bar{\gamma}}$. В зависимости от корневой системы $\Phi(\bar{G})$, мы получаем, что $\bar{G}_{\bar{\gamma}}$ изоморфна простой алгебраической группе с корневой системой равной B_m (для некоторого $m > 1$), C_m (для некоторого $m > 2$), или F_4 . В силу [10, лемма 2.2] элемент s сопряжен со своим обратным относительно $O^{p'}((\bar{G}_{\bar{\gamma}})_{\sigma\bar{\zeta}g}) \leq G_{\zeta g}$, значит $N_{\langle G, \zeta g \rangle}(C_{\langle G, \zeta g \rangle}(s)) \neq C_{\langle G, \zeta g \rangle}(s)$. $\square$

Лемма 4.8. Пусть $\langle G, \zeta g \rangle$ — конечная полулинейная группа лиева типа над полем характеристики p (мы не исключаем случая $\langle G, \zeta g \rangle = G$) и группа G является группой присоединенного типа (напомним, что $g \in \bar{G}_\sigma$, но необязательно $g \in G$). Предположим, что $B = U \rtimes H$, где H — подгруппа Картана группы G , есть ζg -инвариантная подгруппа Бореля группы G , и $\langle B, \zeta g \rangle$ содержит картерову подгруппу K группы $\langle G, \zeta g \rangle$. Предположим, что $K \cap U \neq \{e\}$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:

- (а) либо $\langle G, \zeta g \rangle = \langle {}^2A_2(2^{2t}), \zeta g \rangle$, либо $\langle G, \zeta g \rangle = {}^2A_2(2^{2t}) \rtimes \langle \zeta \rangle$, порядок $|\zeta| = t$ нечетен и не делится на 3, $C_G(\zeta) \simeq {}^2A_2(2^2)$, подгруппа $K \cap G$ абелева и имеет порядок $2 \cdot 3$;
- (б) либо $\langle G, \zeta g \rangle = \langle {}^2A_2(2^{2t}), \zeta g \rangle$, либо $\langle G, \zeta g \rangle = {}^2A_2(2^{2t}) \rtimes \langle \zeta \rangle$, порядок $|\zeta| = t$ нечетен, $C_G(\zeta) \simeq {}^2A_2(2^2)$, подгруппа $K \cap G$ является силовской 2-подгруппой группы G_ζ ;
- (в) либо $\langle G, \zeta g \rangle = \langle A_2(2^{2t}), \zeta g \rangle$, либо $\langle G, \zeta g \rangle = \widehat{A_2(2^{2t})} \rtimes \langle \zeta \rangle$, ζ — графово-полевой автоморфизм порядка $2t$, t не делится на 3, и $C_G(\zeta) \simeq {}^2A_2(2^2)$, подгруппа $K \cap G$ абелева и имеет порядок $2^{|\zeta_2|} \cdot 3$;
- (г) $\langle G, \zeta g \rangle = \langle A_2(2^{2t}), \zeta g \rangle$, ζ — графово-полевой автоморфизм и $C_G(\zeta) \simeq {}^2A_2(2^2)$, подгруппа $K \cap G$ является силовской 2-подгруппой группы G_{ζ_2} ;
- (д) группа G определена над $GF(2^t)$, $\langle G, \zeta g \rangle = G \rtimes \langle \zeta g \rangle$, ζ — полевой автоморфизм порядка t группы $O^{2'}(G)$, если группа $O^{2'}(G)$ расщеп-

- ленная или графовый автоморфизм порядка t , если группа $O^{2'}(G)$ скрученная, и, с точностью до сопряжения в G , $K = Q \rtimes \langle \zeta g \rangle$, где $Q \in$ силовская 2-подгруппа группы $G_{(\zeta g)_{2'}}$;
- (е) группа G определена над $GF(2^t)$, $\langle G, \zeta g \rangle = G \rtimes \langle \zeta g \rangle$, $\zeta \in$ произведение полевых автоморфизмов нечетного порядка t группы $O^{2'}(G)$ и графового автоморфизма порядка 2, ζ и ζg сопряжены относительно $\overline{G}_\sigma$, и, с точностью до сопряжения в G , $K = Q \rtimes \langle \zeta g \rangle$, где $Q \in$ силовская 2-подгруппа группы $G_{(\zeta g)_{2'}}$;
- (ж) $G/Z(G) \simeq \mathbf{PSL}_2(3^t)$, порядок $|\zeta| = t$ нечетен (в частности, $\zeta \in \langle G, \zeta g \rangle$), и K содержит силовскую 3-подгруппу группы G_{ζ_3} ;
- (з) $\langle G, \zeta g \rangle = {}^2G_2(3^{2n+1}) \rtimes \langle \zeta \rangle$, $|\zeta| = 2n + 1$, $K \cap {}^2G_2(3^{2n+1}) = Q \times P$, где Q имеет порядок 2 и $|P| = 3^{|\zeta|_3}$.

Отметим, что в каждом из пунктов (а)–(з) леммы картеровы подгруппы, имеющие указанное строение, существуют. Существование картеровых подгрупп в пунктах (а) и (в) следует из существования картеровой подгруппы порядка 6 в группе $\mathbf{PGU}_3(2)$ (см. [5]). Существование картеровых подгрупп в пунктах (б), (г)–(е) следует из того, что силовская 2-подгруппа в группе лиева типа, определенной над полем порядка 2, совпадает со своим нормализатором. Существование картеровых подгрупп в пункте (ж) следует из того факта, что силовская 3-подгруппа группы $\mathbf{PSL}_2(3)$ совпадает со своим нормализатором. Существование картеровой подгруппы, удовлетворяющей пункту (з) леммы, следует из существования картеровой подгруппы K порядка 6 в (непростой) группе ${}^2G_2(3)$. Существование картеровой подгруппы K порядка 6 в группе ${}^2G_2(3)$ следует из структурных результатов, приведенных в работах [31] и [32].

Доказательство. Если G является одной из групп $A_1(q)$, $G_2(q)$, $F_4(q)$, ${}^2B_2(2^{2n+1})$ или ${}^2F_4(2^{2n+1})$, то лемма следует из [9, таблица] или [10, таблица]. Если $\langle G, \zeta g \rangle = G$, то лемма следует из [6], [9] и [10]. Поэтому можно предполагать, что $\langle G, \zeta g \rangle \neq G$, т. е. что ζ является нетривиальным полевым, графово-полевым или графовым автоморфизмом. Если $\Phi(\overline{G}) = C_n$, то лемма следует из теоремы 5.1 ниже, в которой не используется лемма 4.8, поэтому мы предполагаем, что $\Phi(\overline{G}) \neq C_n$. Если $\Phi(\overline{G}) = D_4$ и либо графово-полевой автоморфизм ζ раскладывается в произведение полевого автоморфизма и графового автоморфизма порядка 3, либо $G \simeq {}^3D_4(q^3)$, то лемма следует из теоремы 6.1 ниже, в которой не используется лемма 4.8, поэтому мы предполагаем, что $\langle G, \zeta g \rangle$ лежит в группе A_1 , определенной в

теореме 6.1, и $G \not\cong {}^3D_4(q^3)$. Поскольку мы будем использовать лемму 4.8 в доказательстве теоремы 7.1, после теорем 5.1 и 6.1, мы вправе сделать такие дополнительные предположения.

Предположим, что q нечетно и $\Phi(\bar{G})$ имеет один из следующих типов: A_n ($n \geq 2$), D_n ($n \geq 4$), B_n ($n \geq 3$), E_6 , E_7 или E_8 . По лемме 2.3 мы имеем, что KU/U является картеровой подгруппой группы $\langle B, \zeta g \rangle / U \simeq \langle H, \zeta g \rangle$. Так как $\bar{G}_\sigma = G\bar{H}_\sigma$, где $\bar{H}$ — максимальный расщепленный тор группы $\bar{G}$ и $\bar{H}_\sigma \cap G = H$, то можно считать, что $g \in \bar{H}_\sigma$, в частности, g централизует H . Поэтому $H_\zeta \leq Z(\langle H, \zeta g \rangle)$, и мы получаем, с точностью до сопряжения в B , что $H_\zeta \leq K$. По лемме 4.3, автоморфизм $\zeta_{2'}$ централизует силовскую 2-подгруппу Q группы H . Таким образом, любой элемент нечетного порядка группы $\langle H, \zeta g \rangle$ централизует Q и лемма 2.5 влечет, что с точностью до сопряжения в B , справедливо $Q \leq K$. Из леммы 3.3 следует, что $C_U(Q) = \{e\}$; противоречие с нетривиальностью $K \cap U$.

Предположим, что $G \simeq {}^2G_2(3^{2n+1})$ и $\langle G, \zeta g \rangle = G \rtimes \langle \zeta \rangle$ (в этом случае $O^{p'}(\bar{G}_\sigma) = \bar{G}_\sigma$). Вновь по лемме 2.3 KU/U является картеровой подгруппой группы $(B \rtimes \langle \zeta \rangle) / U \simeq H \rtimes \langle \zeta \rangle$. По [10, лемма 2.2] любой полупростой элемент группы G сопряжен со своим обратным. Так как неабелевы композиционные факторы централизатора любого полупростого элемента группы G могут быть изоморфны лишь группам $A_1(q)$, из [9, Таблица] следует, что централизатор любого полупростого элемента группы G удовлетворяет условию (C). Поэтому лемма 2.4 влечет, что $KU/U \cap B/U$ является 2-группой. С другой стороны, $|H|_2 = 2$ и $KU/U \geq Z(B/U) \geq H_\zeta$, откуда $|H_\zeta| = 2$ и $|\zeta| = 2n + 1$. Таким образом, $K \cap G = (K \cap U) \times \langle t \rangle$, где $t \in$ инволюция. Отсюда следует, что $K \cap U = C_G(t) \cap G_{\zeta_{3'}}$. Теперь структурные результаты из [31] и [32, теорема 1] влекут справедливость пункта (з) леммы.

Предположим теперь, что $q = 2^t$. Предположим сначала, что $\Phi(\bar{G})$ имеет один из типов A_n ($n \geq 2$), D_n ($n \geq 4$), B_n ($n \geq 3$), E_6 , E_7 или E_8 , G расщепленная, и ζ является полевым автоморфизмом. Как и выше мы получаем, что $H_\zeta \leq K$ и $O^{2'}(G_\zeta) \in$ расщепленная группа лиева типа с полем определения $q = 2^{t/|\zeta|}$. По лемме Хартли-Шута 3.2 для любого $r \in \Phi(\bar{G})$ и для любого $s \in GF(2^{t/|\zeta|})^*$ существует такой $h(\chi) \in H_\zeta \cap O^{2'}(G_\zeta)$, что $\chi(r) = s$. Рассуждения, аналогичные доказательству леммы 3.3, влекут, что при $\frac{t}{|\zeta|} \neq 1$ справедливо $K \cap U \leq C_U(H_\zeta) = \{e\}$; противоречие. Значит, $|\zeta| = t$ и $H_\zeta = \{e\}$. Поскольку g можно выбрать в $\bar{H}_\sigma$ и $\langle \zeta g \rangle \cap \bar{G}_\sigma \leq \langle \zeta g \rangle \cap \bar{H}_\sigma \leq H_\zeta = \{e\}$, то $\langle \zeta g \rangle \cap \bar{G}_\sigma = \{e\}$. По лемме 4.4 элементы ζg и ζ сопряжены в $\bar{G}_\sigma$, откуда следует пункт (д) леммы.

Теперь предположим, что $\Phi(\bar{G})$ имеет один из типов A_n ($n \geq 3$), D_n ($n \geq 4$) или E_6 , и либо ζ есть графово-полевой автоморфизм и G расщепленная, либо G скрученная. Пусть $\rho \in$ симметрия корневой системы $\Phi(\bar{G})$, соответствующая автоморфизму γ (напомним, что по определению $\zeta = \gamma^e \varphi^\ell$), и $\bar{r}$ обозначает r^ρ для $r \in \Phi(\bar{G})$. Как и выше, можно доказать, что, с точностью до сопряжения, $H_\zeta \leq K$. Если $H_\zeta \neq \{e\}$, то по лем-

ме Хартли-Шута 3.2 мы получаем, что $C_U(H_\zeta) = \{e\}$, что противоречит условию $K \cap U \neq \{e\}$. Если $H_\zeta = \{e\}$, то либо группа G является скрученной и $|\zeta| = t$ что влечет утверждение (д) леммы; либо группа G является расщепленной, $|\zeta| = 2t$, в частности число t нечетно, что влечет пункт (е) леммы.

Предположим, что $O^{2'}(G) \simeq A_2(2^t)$, $\zeta \in$ графово-полевым автоморфизм и t нечетно. Если $|\zeta| \neq 2t$, то рассуждения, использующие лемму Хартли-Шута 3.2, аналогичные доказательству леммы 2.4 показывают, что $C_U(H_\zeta) = \{e\}$, что противоречит условию $K \cap U \neq \{e\}$. Если $|\zeta| = 2t$, то мы получаем пункт (е) леммы.

Предположим теперь, что $O^{2'}(G) \simeq A_2(2^{2t})$ и $\zeta \in$ графово-полевым автоморфизм. Вновь при $|\zeta| \neq 2t$ из леммы Хартли-Шута 3.2 следует, что $C_U(H_\zeta) = \{e\}$, что противоречит условию $K \cap U \neq \{e\}$. Если $|\zeta| = 2t$, то либо $G_\zeta \simeq {}^2A_2(2^2)$, либо $G_\zeta \simeq {}^2A_2(2^2)$. Если $G_\zeta \simeq {}^2A_2(2^2)$, то $H_\zeta = \{e\}$ и мы получаем утверждение (г) леммы. Если $G_\zeta \simeq {}^2A_2(2^2)$, то $|H_\zeta| = 3$, и поэтому $KU/U \cap HU/U$ является циклической группой $\langle y \rangle$ порядка $(2^{t_3} + 1)_3 = 3^k$, где $3^{k-1} = t_3$. Если $k > 1$, то лемма Хартли-Шута 3.2 влечет, что $C_U(y) = \{e\}$, что невозможно. Таким образом, t не делится на 3 и $K \cap U$ содержится в централизаторе элемента x , порождающего H_ζ . Рассмотрим гомоморфизм $GL_3(2^{2t}) \rightarrow PGL_3(2^{2t})$. Тогда некоторый прообраз элемента x подобен матрице

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

где $\lambda \in$ порождающий элемент мультипликативной группы поля $GF(2^2)$. Прообраз группы U сопряжен с множеством верхнетреугольных матриц, на диагонали которых стоят одинаковые элементы. Непосредственные вычисления показывают, что $C_U(x)$ изоморфна аддитивной группе поля $GF(2^{2t})$. Нильпотентность группы K влечет, что $K \cap U = (C_U(x))_{\zeta_{2'}}$, откуда следует пункт (в) леммы.

Предположим теперь, что $O^{2'}(G) \simeq {}^2A_2(2^{2t})$. По лемме 2.3 KU/U является картеровой подгруппой группы $\langle B, \zeta g \rangle / U \simeq \langle H, \zeta g \rangle$ и, как и выше, можно считать, что $H_\zeta \leq K$. Если $|\zeta| = 2t$, то $G_\zeta \simeq SL_2(2)$ и $H_\zeta = \{e\}$, откуда следует пункт (д) леммы. Предположим, что число t четно и $|\zeta| \leq t$. Тогда либо $O^{2'}(G_\zeta) \simeq SL_2(2^{2t/|\zeta|})$ (если порядок $|\zeta|$ четен), либо $O^{2'}(G_\zeta) \simeq {}^2A_2(2^{2t/|\zeta|})$ (если порядок $|\zeta|$ нечетен, следовательно, $|\zeta| < t$). Очевидно, что H_ζ содержит такой элемент x , что $K \cap U \leq C_U(H_\zeta) = \{e\}$, и это дает противоречие с условием $K \cap U \neq \{e\}$. Если число t нечетно и $t \neq |\zeta|$, то $O^{2'}(G_\zeta) \simeq {}^2A_2(2^{2t/|\zeta|})$, откуда следует, что H_ζ содержит такой элемент x , что $C_U(x) = \{e\}$. Если $|\zeta| = t$ и число t нечетно, то порядок $|KU/U \cap B/U|$ может делиться только на 3 (в противном случае из леммы Хартли-Шута 3.2 вновь следует, что $C_U(H_\zeta) = \{e\}$). Если $G_\zeta \simeq {}^2A_2(2^{2t/|\zeta|})$, то $H_\zeta = \{e\}$ и мы получаем пункт (б) леммы. Если

$G_\zeta \simeq {}^2A_2(\widehat{2^{2t}/|\zeta|})$, то $KU/U \cap HU/U$ является циклической группой $\langle y \rangle$ порядка $(2^{t_3} + 1)_3 = 3^k$, где $3^{k-1} = t_3$. Если $k > 1$, то лемма Хартли-Шута 3.2 влечет, что $C_U(y) = \{e\}$, что невозможно. Таким образом, t не делится на 3 и $K \cap U$ содержится в централизаторе элемента x , порождающего H_ζ . Как и в нескрученном случае выше, мы получаем, что $C_U(x)$ изоморфна аддитивной подгруппе поля $GF(2^t)$. Нильпотентность группы K влечет, что $K \cap U = (C_U(x))_{\zeta_2'}$, откуда следует пункт (а) леммы. $\square$

5 Картеровы подгруппы в симплектических группах

Рассмотрим множество $\mathcal{A}$ таких почти простых групп A , что единственный неабелев композиционный фактор $S = F^*(A)$ является канонической простой группой лиева типа и A содержит несопряженные картеровы подгруппы. Если множество $\mathcal{A}$ непусто, обозначим через **Cmin** наименьший возможный порядок подгруппы $F^*(A)$, при $A \in \mathcal{A}$. Если множество $\mathcal{A}$ пусто, то положим, что **Cmin** = ∞ . Мы докажем, что **Cmin** = ∞ , т. е. что $\mathcal{A} = \emptyset$. Отметим, что если $A \in \mathcal{A}$ и $G = F^*(A)$, то существует такая подгруппа A_1 группы A , что $A_1 \in \mathcal{A}$ и $A_1 = KG$ для некоторой картеровой подгруппы K группы A . Действительно, если для любой нильпотентной подгруппы N группы A картеровы подгруппы группы NG сопряжены, то A удовлетворяет условию (C), следовательно, картеровы подгруппы группы A сопряжены, что противоречит выбору A . Значит, существует такая нильпотентная подгруппа N группы A , что картеровы подгруппы группы NG несопряжены. Пусть $K \in$ некоторая картерова подгруппа группы NG . Тогда очевидно, что KG/G является картеровой подгруппой группы NG/G , т. е. совпадает с NG/G . Следовательно, картеровы подгруппы группы KG несопряжены и $KG = A_1 \in \mathcal{A}$. Поэтому условие $A = KG$ в теоремах 5.1, 6.1 и 7.1 не является ограничением и используется лишь для упрощения рассуждений.

В этом параграфе мы рассмотрим картеровы подгруппы в почти простой группе A с простым цоклем $S = F^*(A) \simeq \mathbf{PSp}_{2n}(q)$. Мы рассматриваем такие группы в отдельном параграфе, поскольку для групп типа $\mathbf{PSp}_{2n}(q)$ лемма 3.3 неверна и мы используем рассуждения, немного от-

личные от тех, которые мы используем в доказательстве теоремы 7.1.

Теорема 5.1. Пусть G — конечная присоединенная группа лиева типа с тривиальным центром над полем характеристики p , и $\bar{G}$, σ выбраны так, что $\mathbf{PSp}_{2n}(p^t) \simeq O^{p'}(\bar{G}_\sigma) \leq G \leq \bar{G}_\sigma$. Выберем подгруппу A группы $\text{Aut}(\mathbf{PSp}_{2n}(p^t))$ так, чтобы $A \cap \bar{G}_\sigma = G$. Пусть K — картерова подгруппа группы A . Предположим также, что $|\mathbf{PSp}_{2n}(p^t)| \leq \mathbf{Cmin}$ и $A = KG$. Тогда выполнено в точности одно из утверждений:

- (а) группа G определена над $GF(2^t)$, полевой автоморфизм ζ лежит в A , $|\zeta| = t$, и, с точностью до сопряжения в G , выполнено равенство $K = Q \rtimes \langle \zeta \rangle$, где Q — силовская 2-подгруппа группы G_{ζ_2} ;
- (б) $G \simeq \mathbf{PSL}_2(3^t) \simeq \mathbf{PSp}_2(3^t)$, полевой автоморфизм ζ лежит в A , $|\zeta| = t$ нечетно, и, с точностью до сопряжения в G , выполнено равенство $K = Q \rtimes \langle \zeta \rangle$, где Q — силовская 3-подгруппа группы G_{ζ_3} ;
- (в) p не делит $|K \cap G|$ и K содержит силовскую 2-подгруппу группы A .

В частности, картеровы подгруппы группы A сопряжены, т. е. если $A_1 \in \mathcal{A}$ и $|F^*(A_1)| = \mathbf{Cmin}$, то $F^*(A_1) \not\cong \mathbf{PSp}_{2n}(p^t)$.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно и A — такой контрпример к нему, что порядок $|F^*(A)|$ минимален. Заметим, что в точности одно из утверждений теоремы может быть выполнено, поскольку если выполнено утверждение (б), то, ввиду лемм 3.7 и 4.5, для силовской 2-подгруппы Q группы A не выполнено условие $N_G(Q) = QC_G(Q)$, т. е. не выполнено утверждение (в) теоремы. Кроме того, если $A_1 \in \mathcal{A}$ — почти простая группа, для которой $F^*(A_1) \in \mathcal{A}$ — простая группа лиева типа порядка меньшего, чем $|F^*(A)|$, то картеровы подгруппы группы A_1 сопряжены. Ввиду основной теоремы из [6] можно считать, что $A \neq G$. Кроме того, ввиду [10, теорема 3.5], можно считать, что q нечетно, т. е. $\text{Aut}(\mathbf{PSp}_{2n}(q))$ не содержит графовых автоморфизмов. Таким образом, можно предполагать, что $A = \langle G, \zeta g \rangle$.

Предположим, что K является картеровой подгруппой группы $\langle G, \zeta g \rangle$ и K не удовлетворяет утверждению теоремы. Запишем $K = \langle x, K \cap G \rangle$. Если либо $p \neq 3$, либо t четно, то теорема следует из [10, теорема 3.5]. Таким образом, мы можем предполагать, что $q = 3^t$ и t нечетно. Поскольку $|\bar{G}_\sigma : O^{p'}(\bar{G}_\sigma)| = 2$ и порядок $|\zeta|$ нечетен, можно считать, что порядок $|\zeta g|$ также нечетен и поэтому $\zeta \in \langle G, \zeta g \rangle$, т. е. $\langle G, \zeta g \rangle = G \rtimes \langle \zeta \rangle$. По [10, лемма 2.2] любой полупростой элемент нечетного порядка сопряжен со своим обратным в G . Далее, для любого полупростого элемента $t \in G$ каждый неабелев композиционный фактор централизатора $C_G(t)$ есть простая группа лиева типа (см. [23]) порядка меньшего, чем $\mathbf{Cmin}$. Следовательно, для любого неабелева композиционного фактора S группы $C_G(t)$ и

любой нильпотентной подгруппы $N \leq C_G(t)$ картеровы подгруппы группы $\langle \text{Aut}_N(S), S \rangle$ сопряжены. Значит, $C_G(t)$ удовлетворяет условию (C). Поэтому, по лемме 2.4, $|K \cap G| = 2^\alpha \cdot 3^\beta$ для некоторых $\alpha, \beta \geq 0$.

Если $G = \widehat{\mathbf{PSp}_{2n}(q)}$, то по [34, теорема 2] любой унитарный элемент сопряжен со своим обратным. Поскольку 3 является хорошим простым числом для G , то [35, теоремы 1.2 и 1.4] влекут, что для любого элемента $u \in G$ порядка 3 все неабелевы композиционные факторы группы $C_G(u)$ являются простыми группами лиева типа порядка меньшего, чем **Cmin**. Таким образом, $C_G(u)$ удовлетворяет условию (C), значит, по лемме 2.4, мы получаем, что $K \cap G$ есть 2-группа. Ввиду лемм 4.3 и 4.4 любой элемент $x \in A \setminus G$ нечетного порядка, удовлетворяющий равенству $\langle x \rangle \cap G = \{e\}$, централизует некоторую силовскую 2-подгруппу группы G . Поэтому K содержит силовскую 2-подгруппу группы G , и значит, группы A , т. е. K удовлетворяет утверждению (в) теоремы.

Таким образом, мы можем предполагать, что $G = \mathbf{PSp}_{2n}(q)$ и $\beta \geq 1$, т. е. силовская 3-подгруппа $O_3(K \cap G)$ группы $K \cap G$ нетривиальна. Из леммы 4.2 следует, что $K \cap G$ содержится в некоторой K -инвариантной параболической подгруппе P группы G с фактором Леви L и, с точностью до сопряжения в P , силовская 2-подгруппа $O_2(K \cap G)$ группы $K \cap G$ содержится в L . Заметим, что все неабелевы композиционные факторы группы P являются простыми группами лиева типа порядка меньшего, чем **Cmin**, поэтому P и любой ее гомоморфный образ удовлетворяют условию (C). Группа $\tilde{K} = KO_3(P)/O_3(P)$ изоморфна $K/O_3(K \cap G)$ и, по лемме 2.3, $\tilde{K}$ является картеровой подгруппой группы $\langle \tilde{K}, P/O_3(P) \rangle$. Далее $\tilde{K} \cap P/O_3(P) \simeq O_2(K \cap G)$ есть 2-группа и любой элемент $x \in \langle \tilde{K}, P/O_3(P) \rangle \setminus P/O_3(P)$ нечетного порядка, удовлетворяющий равенству $\langle x \rangle \cap P/O_3(P) = \{e\}$, централизует некоторую силовскую 2-подгруппу группы $P/O_3(P) \simeq L$ (см. леммы 4.3 и 4.4). Следовательно, $O_2(K \cap G)$ содержит силовскую 2-подгруппу группы L , в частности, содержит силовскую 2-подгруппу H_2 группы H . Поскольку K нильпотентна, лемма 3.4 влечет, что $O_3(K \cap G) \leq C_U(H_2) = \langle X_r \mid r \in \text{длинный корень из } \Phi(G)^+ \rangle$. Поскольку для любых двух длинных корней r, s из $\Phi(G)^+$ выполнено $r + s \notin \Phi(G)$, коммутаторная формула Шевалле [12, теорема 5.2.2] влечет, что подгруппа $\langle X_r \mid r \in \text{длинный корень из } \Phi(G)^+ \rangle$ абелева.

Поскольку $\zeta \in$ полевой автоморфизм, он нормализует любую параболическую подгруппу группы G , содержащую ζ -инвариантную подгруппу Бореля. Таким образом, для любого подмножества J множества фундаментальных корней $\Pi = \{r_1, \dots, r_n\}$ корневой системы $\Phi = \Phi(G)$ параболическая подгруппа P_J является ζ -инвариантной. Следовательно, можно считать, что $P = P_J$, где $J \in$ некоторое собственное подмножество множества фундаментальных корней Π корневой системы Φ . Выберем нумерацию фундаментальных корней таким образом, что $r_n \in$ длинный фундаментальный корень, а все остальные $r_i \in$ короткие корни. Если $r_n \in J$, то одна из компонент фактора Леви L ,

например, G_1 , изоморфна группе $Sp_{2k}(q)$ для некоторого $k < n$ (отметим, что поскольку $A \neq G$, то $q \neq 3$). В силу леммы 3.5 мы получаем, что $L/C_L(G_1) = \text{Aut}_L(G_1/Z(G_1)) = G_1/Z(G_1)$. По лемме 2.3, $K_1 = KC_L(G_1)O_3(P)/C_L(G_1)O_3(P) \in$ картерова подгруппа группы $(P \rtimes \langle \zeta \rangle)/C_L(G_1)O_3(P)$. Поскольку $|K_1 \cap P/C_L(G_1)O_3(P)|$ не делится на 3, и ζ централизует некоторую силовскую 2-подгруппу группы $G_1/Z(G_1)$ (см. лемму 4.3), то K_1 содержит силовскую 2-подгруппу группы $P/C_L(G_1)O_3(P) \simeq G_1/Z(G_1) \simeq \mathbf{PSp}_{2k}(q)$. Кроме того, по лемме 4.3 силовская 2-подгруппа группы $(P/C_L(G_1)O_3(P))_\zeta$ является силовской 2-подгруппой группы $P/C_L(G_1)O_3(P)$. Таким образом, $K_1 \cap P/C_L(G_1)O_3(P)$ является силовской 2-подгруппой группы $(P/C_L(G_1)O_3(P))_\zeta \simeq \mathbf{PSp}_{2k}(3)$. Но по лемме 3.7 в группе $\mathbf{PSp}_{2k}(3)$ существует элемент x нечетного порядка, который нормализует, но не централизует силовскую 2-подгруппу; противоречие с тем, что K_1 является картеровой подгруппой группы $(P \rtimes \langle \zeta \rangle)/C_L(G_1)O_3(P)$. Таким образом, можно считать, что $r_n \notin J$.

Рассмотрим множество $J_n = \Pi \setminus \{r_n\}$ и параболическую подгруппу P_{J_n} . Из предыдущих рассуждений следует, что $K \leq P_J \rtimes \langle \zeta \rangle \leq P_{J_n} \rtimes \langle \zeta \rangle$. Далее, подгруппа $\langle X_r \mid r \in \text{длинный корень из } \Phi(G)^+ \rangle$ содержится в $O_3(P_{J_n})$ и $O_3(K \cap G)$ содержится в $\langle X_r \mid r \in \text{длинный корень из } \Phi(G)^+ \rangle$, поэтому $O_3(K \cap G) \leq O_3(P_{J_n})$ и можно считать, что $P = P_{J_n}$. По лемме 2.3, $\tilde{K} = KO_3(P)/O_3(P)$ является картеровой подгруппой группы $(P \rtimes \langle \zeta \rangle)/O_3(P)$. Заметим, что единственный неабелев композиционный фактор группы $P \rtimes \langle \zeta \rangle$ изоморфен $A_{n-1}(q) \simeq \mathbf{PSL}_n(q)$. Ввиду [25, теорема 1] и [26, теорема 4] мы получаем, что $\tilde{K} = R \times \langle \zeta \rangle$, где $R \in$ силовская 2-подгруппа группы P , централизуемая элементом ζ . Таким образом, $O_3(K \cap G) \leq C_P(R)$. Рассмотрим $Q = O_3(K \cap G) \cap P_\zeta$. Поскольку $O_3(K \cap G)$ нетривиальна и K нильпотентна, то группа $Q = O_3(K \cap G) \cap P_\zeta = Z(K) \cap O_3(K \cap G)$ нетривиальна. Следовательно, $N_G(Q) \in$ собственная подгруппа группы G , и по лемме 4.2 $N_G(Q)$ содержится в собственной параболической подгруппе группы G . С другой стороны, $K \leq N_G(Q)$ и $P = P_{J_n} \in$ максимальная собственная параболическая подгруппа группы G . Если $N_G(Q)$ не содержится в P , то $N_G(Q)$ и K содержатся в некоторой параболической подгруппе P_J , для которой $r_n \in J$. Выше было доказано, что $r_n \notin J$, значит, $N_G(Q)$ содержится в P .

Покажем, что $R \times Q \in$ картерова подгруппа группы G_ζ . Действительно, предположим, что некоторый элемент $x \in G_\zeta$ нормализует $R \times Q$. Тогда x нормализует Q , поэтому x лежит в P и нормализует $O_3(P)$. С другой стороны, x нормализует R , значит, нормализует $C_P(R)$, поэтому x нормализует $C_{O_3(P)}(R)$. Кроме того, очевидно, x и ζ перестановочны. Таким образом, x нормализует $(R \times C_{O_3(P)}(R)) \rtimes \langle \zeta \rangle$. Как мы отмечали выше, $K \leq (R \times C_{O_3(P)}(R)) \rtimes \langle \zeta \rangle$ и группа $(R \times C_{O_3(P)}(R)) \rtimes \langle \zeta \rangle$ разрешима. Лемма 2.4(a) влечет, что группа $(R \times C_{O_3(P)}(R)) \rtimes \langle \zeta \rangle$ совпадает со своим нормализатором в $G \rtimes \langle \zeta \rangle$, значит, $x \in R \times C_{O_3(P)}(R)$. Группа $C_{O_3(P)}(R) \leq \langle X_r \mid r \in \text{является длинным корнем} \rangle$ абелева, поэтому любой

элемент из $R \times C_{O_3(P)}(R)$ централизует $C_{O_3(P)}(R) \geq O_3(K \cap G)$. Следовательно, x нормализует $(R \times O_3(K \cap G)) \rtimes \langle \zeta \rangle = K$, т. е. $x \in K$. По построению $R \times Q = K \cap G_\zeta$, значит, $x \in R \times Q$ и $R \times Q \in$ картерова подгруппа группы G_ζ . С другой стороны, $O^{3'}(G_\zeta) \simeq \mathbf{PSp}_{2n}(3^{t/|\zeta|})$ и по индукции группы $\widehat{\mathbf{PSp}_{2n}(3^{t/|\zeta|})}$ и $\widehat{\mathbf{PSp}_{2n}(3^{t/|\zeta|})}$ не содержат картеровых подгрупп, порядок которых делится на 3. Это последнее противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

6 Картеровы подгруппы в группах с автоморфизмом тройственности

Теорема 6.1. Пусть G — конечная присоединенная группа лиева типа над полем характеристики p , $\overline{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$ и $O^{p'}(G)$ изоморфна $D_4(q)$ или ${}^3D_4(q^3)$. Предположим, что $\tau \in$ графовый автоморфизм порядка 3 группы $O^{p'}(G)$ (напомним, что для группы $G \simeq {}^3D_4(q^3)$ автоморфизм $\tau \in$ это такой автоморфизм, множество неподвижных точек которого изоморфно $G_2(q)$). Обозначим через A_1 подгруппу группы $\text{Aut}(D_4(q))$, порожденную внутренне-диагональными и полевыми автоморфизмами, а также графовым автоморфизмом порядка 2. Пусть подгруппа $A \leq \text{Aut}(O^{p'}(G))$ такова, что $A \not\leq A_1$ (если $O^{p'}(G) \simeq D_4(q)$), и $K \in$ картерова подгруппа группы A . Предположим также, что $|O^{p'}(G)| \leq \mathbf{Cmin}$, $G = A \cap \overline{G}_\sigma$ и $A = KG$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

- (а) $G \simeq {}^3D_4(q^3)$, $(|A : G|, 3) = 1$, q нечетно и K содержит силовскую 2-подгруппу группы A ;
- (б) $(|A : G|, 3) = 3$, q нечетно, $\tau \in A$, и, с точностью до сопряжения элементом из G , подгруппа K содержит силовскую 2-подгруппу группы $C_A(\tau) \in \Gamma G_2(q)$ и $\tau \in K$;
- (в) $(|A : G|, 3) = 3$, $q = 2^t$, $|A : G| = 3t$, $A = G \rtimes \langle \tau, \varphi \rangle$, где $\varphi \in$ полевой автоморфизм порядка t , перестановочный с τ и, с точностью до сопряжения элементом из G , подгруппа K содержит силовскую 2-подгруппу группы $C_G(\langle \tau, \varphi \rangle_{2'}) \simeq G_2(2^{t'})$ и $\tau \in K$;
- (г) $O^{p'}(G) \simeq D_4(p^{3t})$, p нечетно, факторгруппа A/G циклическая, $\tau \notin A$, $A = G \rtimes \langle \zeta \rangle$, где, для некоторого натурального m , $\zeta = \tau\varphi^m$ является графово-полевым автоморфизмом, и, с точностью до сопряжения элементом из G , $K = Q \rtimes \langle \zeta \rangle$, где Q является силовской 2-подгруппой группы $G_{\zeta_{2'}} \simeq {}^3D_4(p^{3t/|\zeta_{2'}|})$.

В частности, картеровы подгруппы группы A сопряжены, т. е. если $A_2 \in A$ и $|F^*(A_2)| = \mathbf{Cmin}$, то группа A_2 не удовлетворяет условиям теоремы, значит, $F^*(A_2) \not\simeq {}^3D_4(q^3)$.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна и $A \in$ такой контр-пример к утверждению теоремы, что $|O^{p'}(G)|$ минимален. Ввиду [36, теорема 1.2(vi)] каждый элемент группы G сопряжен со своим обратным. По [23] и [35, теоремы 1.2 и 1.4] для любого элемента $t \in G$ нечетного простого порядка все неабелевы композиционные факторы централизатора $C_G(t)$ являются простыми группами лиева типа, порядка меньшего, чем **Cmin**. Таким образом, $C_A(t)$ удовлетворяет условию (C) и лемма 2.4 влечет, что $K \cap G$ является 2-группой. Далее, лемма 4.4 влечет, что все циклические группы, порожденные полевыми автоморфизмами одинакового нечетного порядка группы G , сопряжены относительно G . Поскольку централизатор любого полевого автоморфизма в G является группой лиева типа, порядка меньшего, чем **Cmin**, мы вновь применяем лемму 2.4 и получаем утверждение теоремы по индукции. Лемма 4.4 также влечет, что если $O^{p'}(G) \simeq D_4(q)$, то все циклические группы, порожденные графово-полевыми автоморфизмами, сопряжены. Поскольку централизатор любого графово-полевого автоморфизма в G является группой лиева типа, порядка меньшего, чем **Cmin**, мы вновь применяем лемму 2.4 и получаем утверждение (г) теоремы по индукции. Таким образом, можно считать, что A не содержит полевого или графово-полевого автоморфизма нечетного порядка. Следовательно, либо $G \simeq {}^3D_4(q^3)$ и A/G является 2-группой, либо K содержит такой элемент s порядка 3, что $\langle s \rangle \cap A_1 = \{e\}$ (для групп ${}^3D_4(q^3)$ справедливо $\langle s \rangle \cap G = \{e\}$), $G \rtimes \langle s \rangle = G \rtimes \langle \tau \rangle$, и $K \cap G$ является 2-группой.

В первом случае мы получаем утверждение (а) теоремы при выполнении условия $(|A : G|, 3) = 1$. Во втором случае существуют ровно две несопряженных циклических подгруппы $\langle \tau \rangle$ и $\langle x \rangle$ порядка 3 группы A такие, что $\langle \tau \rangle \cap A_1 = \langle x \rangle \cap A_1 = \{e\}$ и $G \rtimes \langle x \rangle = G \rtimes \langle \tau \rangle$ (см. [29, (9-1)]). Следовательно, либо $s = \tau \in K$, либо $s = x \in K$. Предположим, что $q \neq 3^t$. В первом случае из известного строения картеровых подгрупп в группе из множества $\Gamma G_2(q)$, полученного в [10], следуют утверждения (б) или (в) теоремы, во втором случае $K \leq C_A(x)$. Ввиду [29, (9-1)] $C_G(x) \simeq \mathbf{PGL}_3^\varepsilon(q)$, где $q \equiv \varepsilon 1 \pmod{3}$, $\varepsilon = \pm$ и $\mathbf{PGL}_3^+(q) = \mathbf{PGL}_3(q)$, $\mathbf{PGL}_3^-(q) = \mathbf{PGU}_3(q)$. Тогда $K = (K \cap G) \times \langle y, \varphi \rangle$, где $\varphi \in$ полевой автоморфизм группы $O^{p'}(G)$, порядок которого есть степень 2, и $y \in$ графовый автоморфизм, порядок которого есть степень 3, и $x \in \langle y \rangle$. В силу нильпотентности K мы получаем, что $y\varphi = \varphi y$, откуда $C_{C_G(\varphi)}(x) = C_{C_G(x)}(\varphi)$. Теперь мы имеем, что

$$O^{p'}(C_G(\varphi)) = \begin{cases} D_4(q^{1/|\varphi|}), & \text{если } O^{p'}(G) \simeq D_4(q), \\ {}^3D_4(q^{3/|\varphi|}), & \text{если } G \simeq {}^3D_4(q^3). \end{cases}$$

Значит, $C_{C_G(x)}(\varphi) = C_{C_G(\varphi)}(x) \simeq \mathbf{PGL}_3^\mu(q^{1/|\varphi|})$, причем $q^{1/|\varphi|} \equiv \mu 1 \pmod{3}$, где $\mu = \pm$ (заметим, что ε и μ могут быть различны). Как мы отмечали выше, $K \cap G$ является 2-группой. С другой стороны, в силу [26, теорема 4], существует элемент z порядка 3, централизующий силовскую 2-подгруппу группы $C_G(x) = \mathbf{PGL}_3^\varepsilon(q)$ и лежащий в $C_{C_G(x)}(\varphi) \simeq \mathbf{PGL}_3^\mu(q^{1/|\varphi|})$. Таким

образом, элемент z централизует K , следовательно, лежит в K . Но $K \cap G$ не содержит элементов нечетного порядка, следовательно, этот второй случай невозможен.

Предположим теперь, что $q = 3^t$. Тогда $C_G(\tau) \simeq G_2(q)$ и мы получаем теорему. Во втором случае $C_G(x) \simeq SL_2(q) \ltimes U$, где U является 3-группой и $Z(C_G(x)) \cap U \neq \{e\}$; противоречие с леммой 2.4. $\square$

7 Картеровы подгруппы в полулинейных группах лиева типа

Теорема 7.1. Пусть G — конечная присоединенная группа лиева типа (G не обязательно простая) над полем характеристики p и $\bar{G}$, σ выбраны так, что $O^{p'}(\bar{G}_\sigma) \leq G \leq \bar{G}_\sigma$. Предположим также, что $G \not\cong {}^3D_4(q^3)$. Выберем подгруппу A группы $\text{Aut}(O^{p'}(\bar{G}_\sigma))$, для которой выполнено равенство $A \cap \bar{G}_\sigma = G$, и, если $O^{p'}(G) = D_4(q)$, предположим, что A содержится в подгруппе A_1 , определенной в формулировке теоремы 6.1. Пусть K — картерова подгруппа группы A и $A = KG$.

Тогда выполнено в точности одно из следующих утверждений:

- (а) G определена над полем характеристики 2, $A = \langle G, \zeta g, t \rangle$, где $t \in 2$ -элемент, K содержится в нормализаторе некоторой t -инвариантной подгруппы Бореля группы G и $K \cap \langle G, \zeta g \rangle$ удовлетворяет одному из утверждений (а)–(е) леммы 4.8;
- (б) $G \simeq \text{PSL}_2(3^t)$, полевой автоморфизм ζ лежит в A , $|\zeta| = t$ нечетно, и, с точностью до сопряжения в G , выполнено равенство $K = Q \ltimes \langle \zeta \rangle$, где Q является силовой 3-подгруппой группы G_{ζ_3} ;
- (в) $A = {}^2G_2(3^{2n+1}) \ltimes \langle \zeta \rangle$, $|\zeta| = 2n + 1$ и с точностью до сопряжения в G выполнено равенство $K = (K \cap G) \ltimes \langle \zeta \rangle$ и $K \cap {}^2G_2(3^{2n+1}) = Q \times P$, где Q порядка 2 и $|P| = 3^{|\zeta|_3}$;
- (г) p не делит $|K \cap G|$ и K содержит силовскую 2-подгруппу группы A , ввиду леммы 4.5 группа A удовлетворяет (ESyl2) тогда и только тогда, когда G удовлетворяет (ESyl2).

В частности, картеровы подгруппы группы A сопряжены.

Замечание. Существует некоторая дихотомия для картеровых подгрупп в группах автоморфизмов конечных групп лиева типа, не содержащих графовый или полево-графовый автоморфизм порядка 3. Они либо содержатся в нормализаторе некоторой подгруппы Бореля, либо характеристика нечетна и картерова подгруппа содержит силовскую 2-подгруппу всей группы.

Предположим, что утверждение теоремы неверно и $A \in$ контрпример к утверждению теоремы, для которого $|F^*(A)|$ минимален. Среди контрпримеров с минимальным $|F^*(A)|$ выберем тот, для которого $|A|$ минимален. В этом случае для любой почти простой группы A_1 , для которой $|F^*(A_1)| < |F^*(A)|$, $F^*(A_1) \in$ простая группа лиева типа и A_1 удовлетворяет условиям теоремы 7.1, картеровы подгруппы сопряжены. Действительно, заметим, что лишь одно утверждение теоремы может быть выполнено, поскольку при выполнении утверждений (б) или (в) условие $N_A(Q) = QC_A(Q)$ для силовской 2-подгруппы Q группы A не выполнено, т. е. не выполнено условие (г) теоремы (то, что никакие другие два утверждения не могут быть выполнены одновременно, очевидно). Таким образом, картеровы подгруппы группы A_1 сопряжены. Отметим также, что отсюда следует неравенство $|F^*(A)| \leq \mathbf{Cmin}$. Действительно, если $A_2 \in \mathcal{A}$ и $F^*(A_2) = \mathbf{Cmin}$, то либо A_2 удовлетворяет условиям теоремы 6.1, либо A_2 удовлетворяет условиям теоремы 7.1. Как мы отмечали в теореме 6.1, первый случай невозможен. Второй случай, как мы только что заметили, возможен лишь в том случае, если $|F^*(A)| \leq |F^*(A_2)| = \mathbf{Cmin}$ (поскольку $A \in$ контрпример к утверждению теоремы для которого $|F^*(A)|$ минимален).

Мы докажем теорему следующим образом. Если $F^*(A) \simeq \mathbf{PSp}_{2n}(q)$, то теорема следует из теоремы 5.1. Если $A = G$, то теорема следует из [3], [5], [6] и [10]. Таким образом, можно считать, что $A/(A \cap G)$ нетривиальна. Пусть $K \in$ картерова подгруппа группы A . Мы покажем сначала, что если p делит $|K \cap G|$, то выполнено одно из утверждений (а)ч(в) теоремы. Затем мы покажем, что если p не делит $|K \cap G|$, то K содержит силовскую 2-подгруппу группы A . Поскольку оба этих шага достаточно запутанные, мы разделили их на два параграфа. Заметим, что по [23] для любого полупростого элемента $t \in G$, все неабелевы композиционные факторы группы $C_G(t)$, значит, группы $C_A(t)$, являются простыми группами лиева типа порядка меньшего, чем $|F^*(A)|$, а значит, меньшего, чем $\mathbf{Cmin}$. Поэтому $C_A(t)$ удовлетворяет условию (С). Для того, чтобы применять леммы 2.3 и 2.4, мы будем использовать этот факт без дальнейших ссылок.

8 Картеровы подгруппы порядка, делящегося на характеристику

Обозначим $K \cap G$ через K_G . Для любой группы A , удовлетворяющей условиям теоремы 7.1 факторгруппа A/G является абелевой и, для некоторого натурального t , изоморфна подгруппе группы $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_t$, где $\mathbb{Z}_t$ обозначает циклическую группу порядка t . Если факторгруппа A/G не является циклической, то группа $O^{p'}(G)$ является расщепленной и A содержит элемент τa , где $\tau \in \text{Графовый автоморфизм группы } O^{p'}(G)$ и $a \in \overline{G}_\sigma$. Тогда любой полупростой элемент нечетного порядка сопряжен со своим обратным в A (см. лемму 4.6). По лемме 2.4 мы получаем, что $|K_G|$ делится только на 2 и p . Если $p = 2$, то K_G является 2-группой, она содержится в собственной K -инвариантной параболической подгруппе P группы G и по лемме 2.3 $KO_2(P)/O_2(P)$ является картеровой подгруппой группы $KP/O_2(P)$. Поскольку $K_G \leq O_2(P)$, то $(KO_2(P)/O_2(P)) \cap (P/O_2(P)) = \{e\}$. Значит, P является подгруппой Бореля группы G , в противном случае мы бы имели $C_{P/O_2(P)}(KO_2(P)/O_2(P)) \neq \{e\}$; противоречие с тем, что $KO_2(P)/O_2(P)$ является картеровой подгруппой группы $KP/O_2(P)$. Таким образом, P является подгруппой Бореля, и теорема следует из леммы 4.8. Далее, если $p \neq 2$, то вновь K_G содержится в собственной параболической подгруппе P группы G такой, что $O_p(K_G) \leq O_p(P)$ и $O_2(K_G) \leq L$. Тогда леммы 4.3 и 4.4 влекут, $H_2 \leq O_2(K \cap G) \leq K$. Далее, лемма 3.3 влечет, что $O_p(K_G) \leq C_U(H_2) = \{e\}$. Следовательно, $K \cap G$ является 2-группой. По леммам 4.3 и 4.4 любой элемент $x \in A \setminus G$ нечетного порядка такой, что $\langle x \rangle \cap G = \{e\}$, централизует некоторую силовскую 2-подгруппу группы G . Значит, K содержит силовскую 2-подгруппу группы A , т. е. K удовлетворяет утверждению (д) теоремы. Поэтому факторгруппа A/G является циклической, и мы можем предполагать, что $A = \langle G, \zeta g \rangle \in \Gamma G$.

Напомним, что мы находимся в условиях теоремы 7.1, $A = \langle G, \zeta g \rangle$ предполагается контрпримером к утверждению теоремы, для которого $|O^{p'}(G)|$ и $|A|$ минимальны, и K является такой картеровой подгруппой группы $\langle G, \zeta g \rangle$, что p делит $|K_G|$. Мы имеем, что $K = \langle \zeta^k g, K_G \rangle$. Посколь-

ку $|O^{p'}(G)| \leq \mathbf{Cmin}$, лемма 2.3 влечет, что KG/G является картеровой подгруппой группы A/G . Следовательно, $|\zeta^k| = |\zeta|$, и мы можем предполагать, что $k = 1$ и $K = \langle K_G, \zeta g \rangle$.

Ввиду леммы 4.2 существует такая собственная σ - и $\bar{\zeta}g$ -инвариантная параболическая подгруппа $\bar{P}$ группы $\bar{G}$, что $O_p(K_G) \leq R_u(\bar{P})$ и $K_G \leq \bar{P}$. В частности, $\bar{P}$ и $\bar{P}^{\bar{\zeta}}$ сопряжены в $\bar{G}$. Пусть $\Phi \in$ корневая система группы $\bar{G}$ и $\Pi \in$ множество фундаментальных корней корневой системы Φ . Ввиду [12, предложение 8.3.1], $\bar{P}$ сопряжена с некоторой $\bar{P}_J = \bar{B} \cdot \bar{N}_J \cdot \bar{B}$, где J является подмножеством множества Π и $\bar{N}_J \in$ полный прообраз подгруппы W_J в $\bar{N}$ относительно естественного гомоморфизма $\bar{N}/\bar{T} \rightarrow W$. Далее, $\bar{P}_J$ является $\bar{\varphi}$ -инвариантной, значит, $\bar{P}_J^{\bar{\zeta}} = \bar{P}_J^{\bar{\gamma}^\varepsilon}$ (напомним, что $\bar{\zeta} = \bar{\gamma}^\varepsilon \bar{\varphi}^k$ по определению). Рассмотрим симметрию ρ диаграммы Динкина корневой системы Φ , соответствующую $\bar{\gamma}$. Пусть $\bar{J} \in$ образ множества J относительно ρ . Ясно, что $\bar{P}_J^{\bar{\gamma}} = \bar{P}_{\bar{J}}$. Поскольку $\bar{P}$ и $\bar{P}^{\bar{\zeta}}$ сопряжены в $\bar{G}$, мы получаем, что $\bar{P}_J$ и $\bar{P}_J^{\bar{\zeta}}$ сопряжены в $\bar{G}$. Из [12, теорема 8.3.3] следует, что либо $\varepsilon = 0$, либо $J = \bar{J}$; т. е. $\bar{P}_J$ является $\bar{\zeta}$ -инвариантной.

Далее, мы имеем, что $\bar{P}^{\bar{y}} = \bar{P}_J$ для некоторого $\bar{y} \in \bar{G}$. Значит, $\langle \bar{\zeta}g, \bar{P} \rangle^{\bar{y}} = \langle (\bar{\zeta}g)^{\bar{y}}, \bar{P}_J \rangle$ и $\bar{P}_J^{(\bar{\zeta}g)^{\bar{y}}} = \bar{P}_J$. Отсюда следует, что

$$(\bar{\zeta}g)^{\bar{y}} = \bar{y}^{-1} \bar{\zeta} g \bar{y} = \bar{\zeta} (\bar{\zeta}^{-1} \bar{y}^{-1} \bar{\zeta} g \bar{y}) = \bar{\zeta} \cdot h,$$

где $h = (\bar{\zeta}^{-1} \bar{y}^{-1} \bar{\zeta} g \bar{y}) \in \bar{G}$. Поскольку $\bar{P}_J^{\bar{\zeta}} = \bar{P}_J = \bar{P}_J^{h^{-1}}$, получаем, что $h \in N_{\bar{G}}(\bar{P}_J)$. По [12, теорема 8.3.3], $N_{\bar{G}}(\bar{P}_J) = \bar{P}_J$, таким образом, $\langle \bar{\zeta}g, \bar{P} \rangle^{\bar{y}} = \langle \bar{\zeta}, \bar{P}_J \rangle$. Далее обе группы $\bar{P}$ и $\bar{P}_J$ являются σ -инвариантными. Значит, $\bar{y}\sigma(\bar{y}^{-1}) \in N_{\bar{G}}(\bar{P}) = \bar{P}$. Следовательно, по теореме Ленга-Стейнберга [19, теорема 10.1], можно предполагать, что $\bar{y} = \sigma(\bar{y})$, т. е. $\bar{y} \in \bar{G}_\sigma$. Поскольку $\bar{G}_\sigma = \bar{T}_\sigma \cdot O^{p'}(\bar{G}_\sigma)$ и $\bar{T} \leq \bar{P}_J$, то мы можем предполагать, что $\bar{y} \in O^{p'}(\bar{G}_\sigma)$. Таким образом, с точностью до сопряжения в G , можно предполагать, что $\bar{K} \leq \langle \bar{\zeta}, \bar{P}_J \rangle = \bar{P}_J \rtimes \langle \bar{\zeta} \rangle$ и

$$K \leq \langle (\bar{P}_J \cap G), \zeta g \rangle = \langle P_J, \zeta g \rangle,$$

в частности, $g \in (\bar{P}_J)_\sigma$. Более того, если $\bar{L}_J = \langle \bar{T}, \bar{X}_r \mid r \in J \cup -J \rangle$, то $\bar{L}_J$ есть σ - и $\bar{\zeta}$ -инвариантный фактор Леви группы $\bar{P}_J$ и $L_J = \bar{L}_J \cap G$

есть ζ -инвариантный фактор Леви группы P_J . Тогда L_J^g является ζg -инвариантным фактором Леви группы P_J . Поскольку все факторы Леви сопряжены относительно $O_p(P_J)$, можно считать, что L_J является ζg -инвариантным фактором Леви. Лемма 2.3 влечет, что

$$KO_p(P_J)/O_p(P_J) = X$$

является картеровой подгруппой группы $\langle P_J, \zeta g \rangle / O_p(P_J)$ и

$$KZ(L_J)O_p(P_J)/Z(L_J)O_p(P_J) = \tilde{X}$$

является картеровой подгруппой группы $\langle P_J, \zeta g \rangle / Z(L_J)O_p(P_J)$. Напомним, что $K = \langle \zeta g, K_G \rangle$, значит, если v и $\tilde{v}$ — образы элемента g относительно естественных гомоморфизмов

$$\omega : \langle P_J, \zeta g \rangle \rightarrow \langle L_J, \zeta v \rangle \simeq \langle P_J, \zeta g \rangle / O_p(P_J),$$

$$\tilde{\omega} : \langle P_J, \zeta g \rangle \rightarrow \langle P_J, \zeta g \rangle / Z(L_J)O_p(P_J) \simeq \langle L_J, \zeta v \rangle / Z(L_J),$$

то $X = \langle \zeta v, K_G^\omega \rangle$ и $\tilde{X} = \langle \zeta \tilde{v}, K_G^{\tilde{\omega}} \rangle$. Заметим, что $O_p(P)$ и $Z(L_J)$ — характеристические подгруппы групп P и L_J соответственно, значит, мы можем рассматривать ζ как автоморфизм факторгрупп $L_J \simeq P/O_p(P)$ и $\tilde{L} = L_J/Z(L_J)$. Заметим также, что все неабелевы композиционные факторы группы P являются простыми группами лиева типа порядка меньшего, чем **Cmin**, значит, $\langle P, \zeta g \rangle$ удовлетворяет **(C)**. Таким образом, мы можем применять лемму 2.3 к $\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle$, $\langle L_J, \zeta v \rangle$ и $\langle P, \zeta g \rangle$.

Если $P_J \in$ подгруппа Бореля группы G , то утверждение теоремы следует из леммы 4.8. Поэтому мы можем предполагать, что $L_J \neq Z(L_J)$, т. е. что P_J не является подгруппой Бореля группы G . Тогда $L_J = H(G_1 * \dots * G_k)$, где $G_i \in$ подсистемные подгруппы группы G , $k \geq 1$, и $H \in$ подгруппа Картана группы G . Пусть $\zeta g = (\zeta_2 g_2) \cdot (\zeta_{2'} g_{2'}) \in$ разложение в произведение 2- и 2'- частей элемента ζg (причем $g_2, g_{2'} \in (\bar{P}_J)_\sigma$). Далее, $\zeta_{2'} = \varphi^k$, для некоторого k , является полевым автоморфизмом (напомним, что мы не рассматриваем тройственный автоморфизм) и он нормализует каждую G_i , поскольку φ нормализует каждую G_i . Более того, ввиду леммы 4.3, мы имеем, что $\zeta_{2'}$ централизует силовскую 2-подгруппу группы H .

В частности, он централизует силовскую 2-подгруппу группы $Z(L_J) \leq H$. Следовательно, любой элемент нечетного порядка группы $\langle L_J, \zeta_{2'} v_{2'} \rangle$ централизует силовскую 2-подгруппу группы $Z(L_J)$ (здесь $v_{2'} \in$ образ элемента $g_{2'}$ относительно ω).

Далее, $\tilde{L} = (\mathbf{P}G_1 \times \dots \times \mathbf{P}G_k) \tilde{H}$, где $\tilde{H} = H^{\tilde{\omega}}$ и $\mathbf{P}G_1, \dots, \mathbf{P}G_k \in$ канонические конечные группы лиева типа с тривиальным центром. Положим $M_i = C_{\tilde{L}}(\mathbf{P}G_i)$, очевидно, что $M_i = (\mathbf{P}G_1 \times \dots \times \mathbf{P}G_{i-1} \times \mathbf{P}G_{i+1} \times \dots \times \mathbf{P}G_k) C_{\tilde{H}}(\mathbf{P}G_i)$; обозначим через L_i факторгруппу $\tilde{L}/M_i$ и через π_i соответствующий естественный гомоморфизм. Тогда $L_i \in$ конечная группа лиева типа и $\mathbf{P}G_i \leq L_i \leq \widehat{\mathbf{P}G_i}$.

Положим $M_{i,j} = C_{\tilde{L}}(\mathbf{P}G_i \times \mathbf{P}G_j)$, тогда

$$M_{i,j} = (\mathbf{P}G_1 \times \dots \times \mathbf{P}G_{i-1} \times \mathbf{P}G_{i+1} \times \dots \times \mathbf{P}G_{j-1} \times \mathbf{P}G_{j+1} \times \dots \times \mathbf{P}G_k) C_{\tilde{H}}(\mathbf{P}G_i \times \mathbf{P}G_j);$$

обозначим через $\pi_{i,j}$ соответствующий естественный гомоморфизм $\tilde{L} \rightarrow \tilde{L}/M_{i,j}$. Если M_i (соотв. $M_{i,j}$) является ζ -инвариантной, то M_i (соотв. $M_{i,j}$) нормальна в $\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle$ и мы обозначим через π_i (соотв. $\pi_{i,j}$) естественный гомоморфизм $\pi_i : \langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle \rightarrow \langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle / M_i$ ($\pi_{i,j} : \langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle \rightarrow \langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle / M_{i,j}$).

Теперь рассмотрим ζ . Поскольку $\zeta^2 \in$ полевой автоморфизм, могут выполняться два случая: либо ζ нормализует $\mathbf{P}G_i$, либо ζ^2 нормализует $\mathbf{P}G_i$ и $\mathbf{P}G_i^\zeta = \mathbf{P}G_j$ для некоторого $j \neq i$. Рассмотрим эти два случая по отдельности.

Пусть ζ нормализует $\mathbf{P}G_i$. Тогда ζ нормализует M_i , и лемма 2.3 влечет, что $\tilde{X}^{\pi_i} = K_i$ есть картерова подгруппа группы $\langle L_i, (\zeta \tilde{v})^{\pi_i} \rangle$. Поскольку $\langle L_i, (\zeta \tilde{v})^{\pi_i} \rangle \in$ полулинейная группа лиева типа, удовлетворяющая условиям теоремы 7.1 (по построению ζ^2 является полевым автоморфизмом и потому мы не попадаем в условия теоремы 6.1), $|L_i| < |G|$, и p не делит $|K_i|$, мы имеем, что K_i содержит силовскую 2-подгруппу Q_i группы $\langle L_i, (\zeta \tilde{v})^{\pi_i} \rangle$ (в частности, $p \neq 2$) и по лемме 2.5 группа $\langle L_i, (\zeta \tilde{v})^{\pi_i} \rangle$ удовлетворяет (ESyl2).

Пусть ζ^2 нормализует $\mathbf{P}G_i$ и $\mathbf{P}G_i^\zeta = \mathbf{P}G_j$. Тогда подгруппа $M_{i,j}$ нормальна в $\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle$. Мы хотим показать, что $\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}}$ удовлетворяет

(ESyl2). Поскольку $M_{i,j}$ является нормальной подгруппой группы $\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle$, то по лемме 2.3 $(\tilde{X})^{\pi_{i,j}}$ является картеровой подгруппой группы $\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}}$. Рассмотрим подгруппу

$$\langle (\mathbf{P}G_i)^{\pi_{i,j}} \times (\mathbf{P}G_j)^{\pi_{i,j}}, \tilde{X}^{\pi_{i,j}} \rangle$$

группы $\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}}$ (отметим, что $(\mathbf{P}G_i)^{\pi_{i,j}} \simeq \mathbf{P}G_i$ и $(\mathbf{P}G_j)^{\pi_{i,j}} \simeq \mathbf{P}G_j$, и до конца данного абзаца для сокращения обозначений мы будем отождествлять эти группы). Далее мы находимся в условиях леммы 2.8, а именно, мы имеем конечную группу $\tilde{G} = (\tilde{X})^{\pi_{i,j}}(\mathbf{P}G_i \times \mathbf{P}G_j)$, где $\mathbf{P}G_i \simeq \mathbf{P}G_j$ имеет тривиальный центр. Тогда $\text{Aut}_{(\tilde{X})^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i) \simeq \text{Aut}_{\tilde{X}}(\mathbf{P}G_i)$ является картеровой подгруппой группы $\text{Aut}_{\tilde{G}}(\mathbf{P}G_i)$. Далее, $\mathbf{P}G_i \in$ каноническая конечная группа лиева типа и

$$\mathbf{P}G_i \leq \text{Aut}_{\tilde{G}}(\mathbf{P}G_i) \leq \text{Aut}(\mathbf{P}G_i),$$

т. е. $\text{Aut}_{\tilde{G}}(\mathbf{P}G_i)$ удовлетворяет условиям теоремы 7.1 (по построению ζ^2 является полевым автоморфизмом и потому мы не попадаем в условия теоремы 6.1) и $(\tilde{X})^{\pi_{i,j}} \cap (\mathbf{P}G_i \times \mathbf{P}G_j)$ не делится на характеристику. По индукции, $\text{Aut}_{(\tilde{X})^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i)$ содержит силовскую 2-подгруппу группы $\text{Aut}_{\tilde{G}}(\mathbf{P}G_i)$ (в частности, $p \neq 2$). Такие же рассуждения показывают, что $\text{Aut}_{\tilde{X}}(\mathbf{P}G_j)$ содержит силовскую 2-подгруппу группы $\text{Aut}_{\tilde{G}}(\mathbf{P}G_j)$. Следовательно, $\text{Aut}_{\tilde{G}}(\mathbf{P}G_i)$ и $\text{Aut}_{\tilde{G}}(\mathbf{P}G_j)$ удовлетворяют условию (ESyl2). Поскольку $\text{Aut}_{\tilde{G}}(\mathbf{P}G_i) \leq \text{Aut}_{\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i)$ и $\text{Aut}_{\tilde{G}}(\mathbf{P}G_j) \leq \text{Aut}_{\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_j)$, леммы 3.6 и 4.5 влекут, что группы индуцированных автоморфизмов $\text{Aut}_{\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i)$ и $\text{Aut}_{\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_j)$ удовлетворяют условию (ESyl2). Рассмотрим $N_{\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i)$ и $N_{\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_j)$. Поскольку

$$|\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}} : N_{\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i)| = |\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}} : N_{\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_j)| = 2,$$

нетрудно убедиться, что для любого элемента h из $\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}}$ справедливо равенство смежных классов $hN_{\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i) = hN_{\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_j)$, откуда следует, что $N_{\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i) = N_{\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_j)$. По построению $C_{\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i) \cap C_{\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_j) = \{e\}$, поэтому лемма 2.7 (с $C_{\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i)$ и $C_{\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_j)$ в качестве нормальных подгрупп) влечет, что нормализатор $N_{\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{P}G_i)$ удовлетворяет условию (ESyl2).

Далее, $|\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}} : N_{\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}}}(\mathbf{PG}_1)| = 2$, таким образом лемма 2.9 влечет, что $\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle^{\pi_{i,j}}$ удовлетворяет условию **(ESyl2)**.

Теперь мы покажем, что группа $\langle L_J, \zeta v \rangle$ удовлетворяет условию **(ESyl2)**. Поскольку $\tilde{L} \neq \{e\}$, то, как мы заметили выше, $p \neq 2$. Пусть $Q \in$ силовская 2-подгруппа группы $\langle L_J, \zeta v \rangle$. Рассмотрим элемент $x \in N_{\langle L_J, \zeta v \rangle}(Q)$ нечетного порядка. Нам нужно доказать, что x централизует Q . Как мы заметили выше, любой элемент нечетного порядка группы $\langle L_J, \zeta v \rangle$ централизует $Q \cap Z(L_J)$, значит, если $\tilde{x} = x^{\tilde{\omega}}$ централизует $\tilde{Q} = Q^{\tilde{\omega}} \simeq Q/(Q \cap Z(L_J))$, то x централизует Q . Далее, либо M_i нормальна в $\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle$, либо $M_{i,j}$ нормальна в $\langle \tilde{L}, \zeta \tilde{v} \rangle$ и $(\cap_i M_i) \cap (\cap_{i,j} M_{i,j}) = \{e\}$. Более того, как мы доказали выше, $\tilde{x}^{\pi_i}$ централизует $\tilde{Q}M_i/M_i$, и $\tilde{x}^{\pi_{i,j}}$ централизует $\tilde{Q}M_{i,j}/M_{i,j}$. По лемме 2.7 (с нормальными подгруппами M_i и $M_{i,j}$) мы получаем, что $\tilde{x}$ централизует $\tilde{Q}$.

Таким образом, $\langle L, \zeta v \rangle$ удовлетворяет условию **(ESyl2)** и по лемме 2.5 существует картерова подгруппа F группы $\langle L, \zeta v \rangle$, содержащая Q . Поскольку $\langle L, \zeta v \rangle$ удовлетворяет условию **(C)**, теорема 1.2 влечет, что $X = K^\omega$ и F сопряжены, т. е. X содержит силовскую 2-подгруппу группы $\langle L, \zeta v \rangle$ и, с точностью до сопряжения в $\langle P_J, \zeta g \rangle$, K содержит силовскую 2-подгруппу группы $\langle P_J, \zeta v \rangle$. В частности, силовская 2-подгруппа Q_1 подгруппы Картана H лежит в K и Q_1 централизует $K \cap O_p(P_J) \neq \{e\}$; противоречие с леммой 3.3.

9 Картеровы подгруппы, порядок которых не делится на характеристику

Мы вновь находимся в условиях теоремы 7.1. Как мы отмечали в предыдущем параграфе, для любой группы A , удовлетворяющей условиям теоремы 7.1, факторгруппа A/G является абелевой и, для некоторого натурального t , изоморфна подгруппе группы $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_t$. Если факторгруппа A/G не является циклической, то группа $O^{p'}(G)$ является расщепленной и A содержит элемент ta , где $\tau \in$ графовый автоморфизм группы $O^{p'}(G)$ и $a \in \overline{G}_\sigma$. Таким образом, если группа A/G не является циклической, или

$\Phi(\overline{G}) \neq A_n, D_{2n+1}, E_6$, то по лемме 4.6 и [10, лемма 2.2] любой полупростой элемент группы G сопряжен со своим обратным. По лемме 2.4 мы имеем, что $K_G = K \cap G$ является 2-группой. В условиях теоремы 7.1 группа A/G абелева и, если $\overline{A}_1 \in$ холлова 2'-подгруппа группы A/G , то $\overline{A}_1 \in$ циклическая группа. Пусть $x \in$ прообраз порождающего элемента группы $\overline{A}_1$, взятый в K . Тогда $\langle x \rangle \cap G \leq \langle x \rangle \cap \overline{G}_\sigma \leq K \cap \overline{G}_\sigma = K \cap (A \cap \overline{G}_\sigma) = K \cap G$. Как мы заметили выше, $K \cap G$ является 2-группой, следовательно $\langle x \rangle \cap \overline{G}_\sigma = \{e\}$. По лемме 4.4 элемент x относительно группы $\overline{G}_\sigma$ сопряжен с некоторым полевым автоморфизмом нечетного порядка и по лемме 4.3 элемент x централизует силовскую 2-подгруппу группы G . Значит, K_G является силовской 2-подгруппой группы G (в частности, $p \neq 2$) и, так как A/G абелева, лемма 2.7 влечет, что K содержит силовскую 2-подгруппу группы A . Таким образом, в этом случае выполняется теорема 7.1. Поэтому мы можем предполагать, что $A = \langle \zeta g, G \rangle \in$ полулинейная группа лиева типа, $K = \langle \zeta^k g, K_G \rangle \in$ картерова подгруппа группы A , и $\Phi(\overline{G}) \in \{A_n, D_{2n+1}, E_6\}$. Как и в предыдущем параграфе, мы можем предполагать, что $k = 1$. Поскольку G_ζ нетривиальна, то централизатор $C_G(\zeta g)$ нетривиален, следовательно, подгруппа K_G также нетривиальна. Поэтому, $Z(K) \cap K_G \neq \{e\}$. Рассмотрим элемент $x \in Z(K) \cap K_G$ простого порядка. Тогда $K \in C_A(x) = \langle \zeta g, C_G(x) \rangle$. Далее, $C_{\overline{G}}(x)^0 = \overline{C}$ является связной σ -инвариантной редуктивной подгруппой максимального ранга группы $\overline{G}$. Более того, $\overline{C}$ является характеристической подгруппой группы $C_{\overline{G}}(x)$ и $C_{\overline{G}}(x)/\overline{C}$ изоморфна подгруппе группы Δ (см. [22, предложение 2.10]). Таким образом, K содержится в $\langle K, C \rangle$, где $C = \overline{C} \cap G$. Более того, по лемме 4.1 подгруппа $C = \overline{C} \cap G = T(G_1 * \dots * G_m)$ нормальна в $C_A(x)$ и $K_G C / C$ изоморфна подгруппе группы Δ . Предположим, что $|K_G|$ не делится на 2.

Если $m = 0$, то $C = T = Z(C) \in$ максимальный тор. Тогда тор $\overline{T}$ является $\bar{\zeta}g$ -инвариантным. Ввиду леммы 4.7 получаем, что $N_A(C_A(x)) \neq C_A(x)$. Поскольку $C_A(x)$ в этом случае является разрешимой группой это дает противоречие с леммой 2.4.

Если $m \geq 1$, то $Z(C)$ и $G_1 * \dots * G_m \in$ нормальные подгруппы группы $\langle K, C \rangle$. Значит, мы можем рассмотреть $\tilde{G} = \langle K, G_1 * \dots * G_m * Z(C) \rangle / Z(C) \leq$

$\langle K, C \rangle / Z(C)$. Тогда $\tilde{G} = \tilde{K}(\mathbf{P}G_1 \times \dots \times \mathbf{P}G_m)$, где $\tilde{K} = KZ(C)/Z(C)$ — картерова подгруппа группы $\tilde{G}$ (см. лемму 2.3) и $Z(\mathbf{P}G_i)$ тривиален. Далее, $\tilde{K}$ действует сопряжениями на $\{\mathbf{P}G_1, \dots, \mathbf{P}G_m\}$ и без ограничения общности можно предполагать, что $\{\mathbf{P}G_1, \dots, \mathbf{P}G_m\}$ является $\tilde{K}$ -орбитой. Таким образом, мы находимся в условиях леммы 2.8, и $\text{Aut}_{\tilde{K}}(\mathbf{P}G_1)$ — картерова подгруппа группы $\text{Aut}_{\tilde{G}}(\mathbf{P}G_1)$. Более того $|\tilde{K} \cap \mathbf{P}G_1 \times \dots \times \mathbf{P}G_m|$ не делится на характеристику. По индукции либо $\text{Aut}_{\tilde{K}}(\mathbf{P}G_1)$ содержит силовскую 2-подгруппу группы $\text{Aut}_{\tilde{G}}(\mathbf{P}G_1)$, либо $\text{Aut}_{\tilde{G}}(\mathbf{P}G_1)$ удовлетворяет условиям теоремы 6.1 и $\text{Aut}_{\tilde{K}}(\mathbf{P}G_1) \cap \mathbf{P}G_1$ — нетривиальная 2-группа, в частности характеристика p нечетна. В любом случае $|K \cap G|$ делится на 2, что противоречит нашему предположению. Следовательно, порядок $|K_G|$ четен и можно считать, что $x \in Z(K) \cap K_G$ является инволюцией.

Запишем $\zeta g = \zeta_2 g_1 \cdot \zeta_{2'} g_2$, где $\zeta_2 g_1$ является 2-частью и $\zeta_{2'} g_2$ является 2'-частью элемента ζg . По лемме 4.3 элемент $\zeta_{2'}$ централизует некоторую силовскую 2-подгруппу Q_G группы G , поэтому можно считать, что порядок элемента g_2 нечетен. С точностью до сопряжения в группе G можно считать, что $\zeta_{2'}$ централизует силовскую 2-подгруппу группы K_G . В частности, $\zeta_{2'}$ централизует x . Пусть Q — некоторая силовская 2-подгруппа группы $C_G(x)$. Тогда существует $y \in G$ такой, что $Q^y \leq Q_G$. Заменяя подгруппу K на сопряженную подгруппу K^y , можно считать, что $\zeta_{2'}$ централизует силовскую 2-подгруппу группы $C_G(x)$. Так как $\zeta_{2'} g_2$ централизует x , мы получаем, что $g_2 \in C_{\overline{G}_\sigma}(x)$. Более того, по лемме 3.1 следует, что $g_2 \in C_{\overline{G}}(x)^0$. В частности, g_2 нормализует каждую из G_i и централизует $Z(C)$ и $Z(C_G(x))$.

Заметим, что $\zeta_{2'}$ нормализует каждую из G_i и централизует силовскую 2-подгруппу группы $Z(C_G(x))$ (напомним, что $\zeta_{2'}$ централизует силовскую 2-подгруппу группы $C_G(x)$). Действительно, $\zeta_{2'}$ нормализует C , значит, нормализует характеристические подгруппы $O^{p'}(C) = G_1 * \dots * G_m$ и $Z(C)$ группы C . Поэтому можно рассмотреть индуцированный автоморфизм $\zeta_{2'}$ группы

$$O^{p'}(C)/(Z(C) \cap O^{p'}(C)) = \mathbf{P}G_1 \times \dots \times \mathbf{P}G_m.$$

Поскольку каждая группа $\mathbf{P}G_i$ имеет тривиальный центр и неразложима в прямое произведение собственных подгрупп, следствие из теоремы Крулля-Ремака-Шмидта [37, 3.3.10] влечет, что $\zeta_{2'}$ переставляет различные $\mathbf{P}G_i$. Поскольку $\zeta_{2'}$ централизует некоторую силовскую 2-подгруппу группы $C_G(x)$ и $C \trianglelefteq C_G(x)$, то $\zeta_{2'}$ централизует некоторую силовскую 2-подгруппу группы C , значит, централизует некоторую силовскую 2-подгруппу $Q_1 \times \dots \times Q_m$ группы $\mathbf{P}G_1 \times \dots \times \mathbf{P}G_m$, где $Q_i \in$ силовская 2-подгруппа группы $\mathbf{P}G_i$. Если бы $\zeta_{2'}$ индуцировал нетривиальную подстановку на множестве $\{\mathbf{P}G_1, \dots, \mathbf{P}G_m\}$, то он бы индуцировал нетривиальную подстановку на множестве $\{Q_1, \dots, Q_m\}$. Поскольку каждая группа Q_i нетривиальна, это невозможно. Таким образом, любой элемент нечетного порядка группы $\langle K, C \rangle$ централизует силовскую 2-подгруппу группы $Z(C)$ и нормализует каждую из G_i .

Если $\Phi(\overline{G}) = E_6$, то по лемме 3.1 централизатор любой инволюции группы G в группе $\overline{G}$ связан. По лемме 3.8 любая инволюция группы G содержится в таком максимальном торе T , что $N(G, T)/T \simeq W$, где $W \in$ группа Вейля группы $\overline{G}$. Хорошо известно, что $\overline{C}$ порождается тором $\overline{T}$ и $\overline{T}$ -корневыми подгруппами. Запишем $\overline{C} = \overline{T}(\overline{G}_1 * \dots * \overline{G}_k)$. Поскольку $\overline{T}_\sigma$ либо получен из максимального расщепленного тора $\overline{H}$ скручиванием элементом w_0 порядка 2, либо совпадает с $\overline{H}_\sigma$ и любой полевой автоморфизм действует тривиально на факторгруппе $N_{\overline{G}}(\overline{H})/\overline{H}$, то $\zeta_{2'}$ нормализует каждую подгруппу $\overline{G}_i$. Значит, если $\Phi(\overline{G}_i) = D_4$, то $\zeta_{2'}$ индуцирует полевой (а не графовый или графово-полевой) автоморфизм группы $\overline{G}_i$. Более того, поскольку σ действует тривиально на факторгруппе $N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T}$ (см. лемму 4.3), то [23, предложение 6] влечет, что σ нормализует каждую подгруппу $\overline{G}_i$. Следовательно, никакая группа G_i не изоморфна ${}^3D_4(q^3)$. Если $\Phi(\overline{G})$ совпадает с A_n или D_n , то [15, предложения 7, 8, 10] влекут, что никакая группа G_i не изоморфна ${}^3D_4(q^3)$. Следовательно, в любом случае никакая группа G_i не изоморфна ${}^3D_4(q^3)$. Кроме того, лемма 3.1 влечет, что $|K_G : (K_G \cap C)|$ делит $|C_{\overline{G}}(x)/C_{\overline{G}}(x)^0|$ и $C_{\overline{G}}(x)/C_{\overline{G}}(x)^0$ является 2-группой. В [16] доказано, что если корневая система Φ имеет тип D_n и $\Psi \in$ ее подсистема типа D_4 , то никакой элемент из $N_{W(\Phi)}(W(\Psi))$ не инду-

цирует симметрию порядка 3 диаграммы Динкина корневой системы Ψ . Поскольку $\zeta^2 \in$ полевой автоморфизм, отсутствие симметрии порядка 3 вместе с [23, предложение 6] влечет, что для каждой из G_i автоморфизм ζ_i является полевым (а не графовым или графово-полевым). Следовательно, группа индуцированных автоморфизмов $\langle \text{Aut}_{\tilde{K}}(\mathbf{P}G_i), \mathbf{P}G_i \rangle$ удовлетворяет условиям теоремы 7.1 для всех i .

Далее рассмотрим $\tilde{G} = \tilde{K}(\mathbf{P}G_1 \times \dots \times \mathbf{P}G_m) \leq \langle K, C \rangle / Z(C)$ (возможно, $m = 0$), где $\tilde{K} = KZ(C)/Z(C)$ является картеровой подгруппой группы $\tilde{G}$ (см. лемму 2.3) и, для всех i , группа $\mathbf{P}G_i$ неразложима в прямое произведение собственных подгрупп и $Z(\mathbf{P}G_i) = \{e\}$. По лемме 2.8 мы имеем, что $\text{Aut}_{\tilde{K}}(\mathbf{P}G_1)$ является картеровой подгруппой группы $\text{Aut}_{\tilde{G}}(\mathbf{P}G_1)$. Поскольку $\mathbf{P}G_1$ является конечной группой лиева типа, и $\text{Aut}_{\tilde{G}}(\mathbf{P}G_1)$ удовлетворяет условиям теоремы 7.1, по индукции мы получаем, что $\text{Aut}_{\tilde{G}}(\mathbf{P}G_1)$ удовлетворяет условию **(ESyl2)**. Аналогично мы имеем, что $\text{Aut}_{\tilde{G}}(\mathbf{P}G_i)$ удовлетворяет условию **(ESyl2)** для всех i . Поскольку

$$\text{Aut}_{\langle K, C \rangle / Z(C)}(\mathbf{P}G_i) \geq \text{Aut}_{\tilde{G}}(\mathbf{P}G_i),$$

леммы 3.6 и 4.5 влекут, что $\text{Aut}_{\langle K, C \rangle / Z(C)}(\mathbf{P}G_i)$ удовлетворяет условию **(ESyl2)**. Поскольку $C_{\langle K, C \rangle / Z(C)}(\mathbf{P}G_1 \times \dots \times \mathbf{P}G_m) = \{e\}$, лемма 2.7 с нормальными подгруппами $C_{\langle K, C \rangle / Z(C)}(\mathbf{P}G_1) \cap N_{\langle K, C \rangle / Z(C)}(\mathbf{P}G_1), \dots, C_{\langle K, C \rangle / Z(C)}(\mathbf{P}G_m) \cap N_{\langle K, C \rangle / Z(C)}(\mathbf{P}G_1)$ влечет, что $N_{\langle K, C \rangle / Z(C)}(\mathbf{P}G_1)$ удовлетворяет условию **(ESyl2)**. Далее,

$$|\langle K, C \rangle / Z(C) : N_{\langle K, C \rangle / Z(C)}(\mathbf{P}G_1)| = 2^t$$

и любой элемент нечетного порядка группы $\langle K, C \rangle / Z(C)$ нормализует $\mathbf{P}G_1$, таким образом, по лемме 2.9, мы получаем, что факторгруппа $\langle K, C \rangle / Z(C)$ удовлетворяет условию **(ESyl2)** и по лемме 2.7 $\langle K, C \rangle$ удовлетворяет условию **(ESyl2)**. Поскольку $|\mathbf{P}G_i| < \mathbf{Cmin}$ для всех i , то $\langle K, C \rangle$ удовлетворяет условию **(C)**. По лемме 2.5 мы получаем, что существует картерова подгруппа F группы $\langle K, C \rangle$, содержащая силовскую 2-подгруппу группы $\langle K, C \rangle$. По теореме 1.2 подгруппы F и K сопряжены в $\langle K, C \rangle$, таким образом, K содержит силовскую 2-подгруппу Q груп-

пы $\langle K, C \rangle$. Поскольку $|C_G(x) : C|$ является степенью двойки и $\langle K, C \rangle$ нормализует централизатор $C_G(x)$, мы получаем, что $|\langle K, C_G(x) \rangle : \langle K, C \rangle|$ есть степень двойки. Кроме того, по построению любой элемент нечетного порядка группы $\langle K, C_G(x) \rangle$ лежит в $\langle K, C \rangle$. Таким образом, по лемме 2.9 $\langle K, C_G(x) \rangle$ удовлетворяет условию **(ESyl2)** и K содержит силовскую 2-подгруппу Q группы $\langle K, C_G(x) \rangle$.

Пусть ΓQ — силовская 2-подгруппа группы $\langle G, \zeta g \rangle$, содержащая Q , и $t \in Z(\Gamma Q) \cap G$. Тогда $t \in C_G(x)$, значит, $t \in Z(Q)$, поэтому $t \in Z(K)$. Таким образом, мы можем заменить x на t в предыдущих рассуждениях и получить, что $Q = \Gamma Q$, т. е. K содержит силовскую 2-подгруппу группы $\langle G, \zeta g \rangle$, что завершает доказательство теоремы 7.1.

10 Доказательство основной теоремы

Д формулировки основной теоремы, отметим следствие из теоремы 7.1.

Следствие 10.1. $\mathbf{Cmin} = \infty$, т. е. $\mathcal{A} = \emptyset$.

Доказательство. Действительно, пусть $\mathcal{A} \neq \emptyset$ и $A \in \mathcal{A}$ такова, что $|F^*(A)| = \mathbf{Cmin}$. Поскольку $F^*(A) = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ для некоторой присоединенной простой связной линейной алгебраической группы $\overline{G}$ и некоторого отображения Фробениуса σ , обозначим пересечение $A \cap \overline{G}_\sigma$ через G . Как мы отмечали в начале параграфа 5, можно считать, что $A = KF^*(A) = KG$. Следовательно, группа A либо удовлетворяет условиям теоремы 6.1, либо удовлетворяет условиям теоремы 7.1. В обоих случаях мы доказали, что картеровы подгруппы группы A сопряжены, что противоречит выбору группы A . $\square$

Для того, чтобы сформулировать основную теорему без использования классификации конечных простых групп, мы дадим следующее определение. Говорят, что конечная группа является K -группой, если все ее неабелевы композиционные факторы являются известными простыми группами.

Теорема 10.2. (Основная теорема) Пусть G — конечная K -группа. Тогда картеровы подгруппы группы G сопряжены.

Доказательство. По [6, теорема 1.1], [9, таблица] и [10, теоремы 3.3ч3.5]; и теоремам 5.1, 6.1, и 7.1 из настоящей работы мы получаем, что для любой известной простой группы S и любой нильпотентной подгруппы N

из группы ее автоморфизмов, картеровы подгруппы группы $\langle N, S \rangle$ сопряжены. Таким образом, группа G удовлетворяет условию (C). Значит, по теореме 1.2, картеровы подгруппы группы G сопряжены. $\square$

Из леммы 2.3 и основной теоремы 10.2 следует, что гомоморфный образ картеровой подгруппы является картеровой подгруппой.

Теорема 10.3. Пусть G — конечная K -группа, H — картерова подгруппа группы G и N — нормальная подгруппа группы G . Тогда HN/N является картеровой подгруппой группы G/N .

Автор выражает искреннюю благодарность профессору М.К. Тамбурини за исключительно полезное обсуждение статьи, позволившее существенно улучшить первоначальный вариант. Автор также благодарит А.В. Васильева, М.А. Гречкосееву, А.В. Заварничина и В.Д.Мазурова за указанные ошибки и неточности.

Список литературы

- [1] R. W. Carter, Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups, Math. Z., **75** (1961), 136–139.
- [2] L. Di Martino and M.C. Tamburini, I sottogruppi nilpotenti autonormalizzanti di S_n e di A_n , Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A, **110** (1976), 235–241.
- [3] L. Di Martino and M. C. Tamburini, Carter subgroups of projective linear groups, Boll. Un. Mat. Ital. B, **7** (1987), 905–915.
- [4] Н. А. Вавилов, Нильпотентные самонормализуемые подгруппы общих линейных групп над конечным полем, ЛОМИ, **86** (1979), 34–39.
- [5] L. Di Martino, M. C. Tamburini and A. E. Zalesskii, Carter subgroups in classical groups, J. London Math. Soc. (2), **55** (1997), 264–276.
- [6] A. Previtali, M. C. Tamburini, E. P. Vdovin, The Carter subgroups of some classical groups, Bull. London Math. Soc., **36**, N 1 (2004), 145–155.

-
- [7] *A. D'aniello*, Sull' esistenza di sottogruppi nilpotenti autonormalizzanti in alcuni gruppi semplici, II, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., **74** (1983), 146.
 - [8] *F. Dalla Volta, A. Lucchini, and M. C. Tamburini*, On the conjugacy problem for Carter subgroups, Comm. Algebra, **26**, N 2 (1998), 395401.
 - [9] *Е. П. Вдовин*, О проблеме сопряженности картеровых подгрупп, СМЖ, **47**, N 4 (2006), 7254730.
 - [10] *M. C. Tamburini, E. P. Vdovin*, Carter subgroups of finite groups, J.Algebra, **255**, N 1 (2002), 1484163.
 - [11] *W. Feit, J. Thompson*, Solvability of groups of odd order, Pacif. J. Math., **13**, N 3 (1963), 775-1029.
 - [12] *R. W. Carter*, Simple groups of Lie type, John Wiley and Sons, 1972.
 - [13] *Дж. Хамфри*, Линейные алгебраические группы. Москва, «Наука», 1980.
 - [14] *R. Steinberg*, Automorphisms of finite linear groups, Canad.J.Math., **12**, N 4 (1960), 6064615.
 - [15] *R. W. Carter*, Finite groups of Lie type, conjugacy classes and complex characters, John Wiley and Sons, 1985.
 - [16] *R. W. Carter*, Centralizers of semisimple elements in the finite classical groups, Proc. London Math. Soc. (3), **42**, N 1 (1981), 141.
 - [17] *D. Deriziotis*, Conjugacy classes and centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type, Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematic der Universität Essen, **11** 1984.
 - [18] *D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon*, The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Chapter A. Almost simple K -groups. Mathematical Surveys and Monographs, **40**, N 3, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

-
- [19] *R. Steinberg*, Endomorphisms of algebraic groups, Mem.AMS, **80**, 1968.
- [20] *A. Borel and J. de Siebental*, Les-sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos, Comment.Math.Helv., **23** (1949), 200-221.
- [21] *Е.Б. Динкин*, Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли, Математический сборник, **30**, N 2 (1952), 349-462.
- [22] *J. E. Humphreys*, Conjugacy classes in semisimple algebraic groups, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, Mathematical Survey and Monographs, **43**, 1995.
- [23] *R. W. Carter*, Centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type, Proc. London Math. Soc. (3), **37**, N 3 (1978), 491-507.
- [24] *B. Hartley, G. Shute*, Monomorphisms and direct limits of finite groups of Lie type, Quart.J.Math.Oxford Ser. (2), **35**, N 137 (1984), 49-71.
- [25] *А. С. Кондратьев*, Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых группах, Мат. заметки, **78**, N 3 (2005), 368-376.
- [26] *А. С. Кондратьев, В. Д. Мазуров*, 2-сигнализаторы конечных простых групп, Алгебра и логика, **42**, N 5 (2003), 594-623.
- [27] *А. Борель, Р. Картер, К.В. Кэртис, Н. Ивахори, Т.А. Спрингер, Р. Стейнберг*, Семинар по алгебраическим группам, Москва, «Мир», 1973.
- [28] *R. W. Carter*, Conjugacy classes in the Weyl group, Compositio Mathematica, **25**, N 1 (1972), 1-59.
- [29] *D. Gorenstein, R. Lyons*, The local structure of finite groups of characteristic 2 type, Mem. AMS, **42** (1983), ISSN 0065-9266.
- [30] *W. Feit and G. Zukerman*, Reality properties of conjugacy classes in spin groups and symplectic groups, Algebraists' homage: papers in ring theory and related topics, New Haven, 1981, 239-253.

- [31] *H. N. Ward*, On Ree's series of simple groups, Trans. Amer. Math. Soc., **121**, N 1 (1966), 62ч80.
- [32] *В. М. Левчук, Я. Н. Нусим*, О строении групп Ри, Алгебра и логика, **24**, N 1 (1985), 26ч41.
- [33] *J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, and R. A. Wilson*, Atlas of »nite groups, Clarendon Press, Oxford (1985).
- [34] *M. J. Wonenburger*, Transformations which are products of involutions, J.Math.Mech., **16**, N 1 (1966), 32ч38.
- [35] *G. M. Seitz*, Unipotent elements, tilting modules, and saturation, Inv. Math, **141**, N 3 (2000), 467ч503.
- [36] *P. H. Tiep, A. E. Zalesski*, Real conjugacy classes in algebraic groups and »nite groups of Lie type, J.Group Theory, **8**, N 3 (2005), 291ч315.
- [37] *D. J. S. Robinson*, A Course in the Theory of Groups, Springer, 1996.

Вдовин Евгений Петрович

Институт математики им. Соболева СО РАН

пр. Академика Коптюга, 4

Новосибирск 630090

vdovin@math.nsc.ru